



TUGAS AKHIR - SM141501

**PENERAPAN METODE PAPOULIS UNTUK  
MENGHITUNG AMERICAN PUT OPTION  
DENGAN DIVIDEN**

IVAN OCTAVIANO  
NRP 1213 100 025

Dosen Pembimbing:  
Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si  
Endah Rokhmati M.P., Ph.D

DEPARTEMEN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2017





FINAL PROJECT - SM141501

**APPLICATION OF PAPOULIS METHOD TO  
CALCULATE AMERICAN PUT OPTION WITH  
DIVIDENDS**

IVAN OCTAVIANO  
NRP 1213 100 025

Supervisor:  
Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si  
Endah Rokhmati M.P., Ph.D

DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
Faculty of Mathematics and Natural Sciences  
Sepuluh Nopember Institute of Technology  
Surabaya 2017



## LEMBAR PENGESAHAN

### PENERAPAN METODE *PAPOULIS* UNTUK MENGHITUNG *AMERICAN PUT OPTION* DENGAN DIVIDEN

### *APPLICATION OF PAPOULIS METHOD TO CALCULATE AMERICAN PUT OPTION WITH DIVIDENDS*

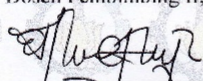
#### TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat  
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains  
Pada bidang studi Matematika Terapan  
Program Studi S-1 Departemen Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

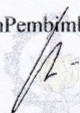
Oleh :  
IVAN OCTAVIANO  
NRP. 1213100025

Menyetujui,


Dosen Pembimbing II,

  
Endah Rokhmah M.P., Ph.D  
NIP. 19761213 200212 2 001

Dosen Pembimbing I,

  
Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si  
NIP. 19600527 198701 1 001

Mengetahui,  
Kepala Departemen Matematika  
FMIPA ITS

  
Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT  
NIP. 19700831 199403 1 003  
Surabaya, Agustus 2017



# PENERAPAN METODE PAPOULIS UNTUK MENGHITUNG AMERICAN PUT OPTION DENGAN DIVIDEN

Nama Mahasiswa : IVAN OCTAVIANO  
NRP : 1213 100 025  
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS  
Pembimbing : 1. Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si  
2. Endah Rokhmati M.P., Ph.D

## Abstrak

*Metode Papoulis yang memiliki 2 parameter  $N$  dan  $\rho$  yang harus ditentukan merupakan salah satu metode pendekatan numerik untuk mendapatkan invers transformasi Laplace dari fungsi dalam domain Laplace yang invers transformasinya sulit diselesaikan secara analitik. Pada Tugas Akhir ini, dibahas mengenai kajian metode Papoulis dan penerapannya dalam bidang investasi yaitu American put option dengan dividen. Pada uji coba fungsi sederhana, metode Papoulis memiliki tingkat akurasi yang baik untuk 28 nilai pasangan parameter dengan nilai pasangan parameter  $N=19$  dan  $\rho = 1.9$  merupakan nilai pasangan parameter yang optimal untuk menghitung nilai exercise optimal American put option dengan dividen. Performansi dari metode Papoulis dengan parameter tersebut menghasilkan nilai exercise optimal bagi pembeli option yaitu sebesar \$69.89 dan memiliki kecepatan komputasi 0.031196 detik.*

**Kata-kunci:** *Metode Papoulis, Invers transformasi Laplace, American put option, Dividen*





# APPLICATION OF PAPOULIS METHOD TO CALCULATE AMERICAN PUT OPTION WITH DIVIDENDS

Name : IVAN OCTAVIANO  
NRP : 1213 100 025  
Department : Mathematics FMIPA-ITS  
Supervisors : 1. Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si  
2. Endah Rokhmati M.P., Ph.D

## Abstract

*The Papoulis method that has two parameters  $N$  and  $\rho$  to be determined is one of the numerical approach methods to obtain the inverse Laplace transform of the function in the Laplace domain whose inverse transformation is difficult to be solved analytically. The study of Papoulis method and its application in financial planning such as American put option with dividends are described in this final assignment. The Papoulis method has good accuracy for 28 pair values of parameter  $(N, \rho)$  on simple functions test with the value  $N = 19$  and  $\rho = 1.9$  is the optimal pair of parameter value for calculating the optimal exercise value American put option with dividends. The performance of the Papoulis method with those parameters obtain optimal exercise value for the option buyer is \$69.89 and has a fairly fast computing speed of 0.031196s.*

**Keywords:** *Papoulis method, Laplace transform inversion, American put option, Dividends*



## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Subhaanahu Wa Ta'aala yang telah memberikan limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini yang berjudul

### **"PENERAPAN METODE *PAPOULIS* UNTUK MENGHITUNG NILAI *AMERICAN PUT OPTION* DENGAN DIVIDEN"**

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, MT selaku Kepala Departemen Matematika ITS.
2. Bapak Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si. dan Ibu Endah Rokhmati M.P., Ph.D, selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan tugas akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
3. Bapak Drs. Komar Baihaqi, M.Si, Bapak Drs. Nurul Hidayat, M.Kom, dan Ibu Dra. Farida Agustini Widjajati, MS selaku dosen penguji yang telah memberikan semua saran demi perbaikan tugas akhir ini.

4. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, M.Si selaku Ketua Program Studi S1 Departemen Matematika ITS
5. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si selaku koordinator tugas akhir dan Mas Ali yang selalu memberikan informasi mengenai tugas akhir.
6. Ibu Dra. Nur Asiyah, M.Si selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Departemen Matematika FMIPA ITS.
7. Bapak dan Ibu dosen Departemen Matematika ITS yang telah membimbing penulis selama menempuh pendidikan di Departemen Matematika ITS.
8. Para staf Departemen Matematika ITS yang telah banyak membantu penulis selama menempuh pendidikan di Departemen Matematika ITS.
9. Bapak Permana Indra Djatmiko dan Ibu Sri Djuwitastuti yang selalu mendoakan, menguatkan, dan mendukung penulis sehingga penulis bisa sampai saat ini.
10. Saudara penulis yaitu Mirza Agistha dan Devy Yuvanto yang selalu memberikan doa, semangat, dan dukungan.
11. Teman-teman Pejuang 116, Ayu Risanti dan Lisa Anisa yang saling mendukung dan memotivasi satu sama lain.
12. Uzu, Yenny, Wawan, Budi, Mega dan Gery yang telah banyak membantu penulis dalam proses pengerjaan Tugas Akhir.
13. Eries, Melynda, Jessica, Niken, Diana, Neni, Nurma, Ayu, Ina, sahabat Grup S.Si yang selalu menguatkan dan memberi dukungan kepada penulis.

14. Ardi, Agus, Sifa'ul, Prima, Daus, Bayu, Romli, Adit, Rozi, Sinar, Zani, Yoga, Bhara, Haidar, Fatkhunur, Fadhlán, Satria, Firdo, Jonbon, Jojo, Aril selaku para sahabat penulis.
15. Dulur Matematika ITS 2013 yang selalu memberikan doa dan dukungannya kepada penulis.
16. Generator HIMATIKA ITS, Kesma HIMATIKA ITS 2014-2016, BPP/DPH LDJ Ibnu Muqlah, Kaderisasi LDJ Ibnu Muqlah 2014-2016.
17. Semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu-persatu. Terimakasih telah mendoakan dan mendukung penulis sampai dengan selesainya Tugas Akhir ini.

Penulis juga menyadari bahwa dalam tugas akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan tugas akhir ini. Akhir kata, penulis berharap semoga tugas akhir ini dapat membawa manfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, Juli 2017

Penulis



## DAFTAR ISI

	Hal
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xix
DAFTAR LAMPIRAN	xxi
DAFTAR SIMBOL	xxiii
BAB I     PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	4
1.3 Batasan Masalah .....	4
1.4 Tujuan .....	4
1.5 Manfaat .....	4
BAB II    TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Penelitian Terdahulu .....	5
2.2 Metode <i>Papoulis</i> .....	6
2.3 <i>Option</i> .....	6
2.3.1 Terminologi dalam <i>option</i> .....	7
2.3.2 Mekanisme <i>option</i> .....	8

	Hal
2.3.3 Tipe <i>option</i> .....	8
2.3.4 Faktor <i>option</i> .....	9
2.4 Dividen .....	10
2.5 Formula Harga <i>Exercise</i> Optimal .....	11
BAB III METODOLOGI PENELITIAN .....	17
3.1 Objek dan Aspek Penelitian .....	17
3.2 Data Penelitian .....	17
3.3 Tahap Penelitian .....	17
3.4 Diagram Alir Penelitian .....	18
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN .....	21
4.1 Kajian metode <i>Papoulis</i> .....	21
4.2 Uji Coba Fungsi Sederhana .....	29
4.3 Aplikasi Formula Harga <i>Exercise</i> Optimal ...	35
4.4 Analisa Performansi Metode <i>Papoulis</i> .....	38
BAB V PENUTUP .....	45
5.1 Kesimpulan .....	45
5.2 Saran .....	45
DAFTAR PUSTAKA .....	47
LAMPIRAN .....	49
BIODATA PENULIS .....	73



## DAFTAR GAMBAR

	Hal
Gambar 3.1 Diagram Alir Tahap Penelitian . . . . .	19
Gambar 4.1 Plot Nilai Rata-rata Error Relatif $f(t) = 5$ . . . . .	31
Gambar 4.2 Plot Nilai Rata-rata Error Relatif $f(t) = e^{0.1t}$ . . . . .	32
Gambar 4.3 Plot Nilai Rata-rata Error Relatif $f(t) = t$ . . . . .	33
Gambar 4.4 Plot Nilai Rata-rata Error Relatif $f(t) = \sin t$ . . . . .	33
Gambar 4.5 Plot Nilai Rata-rata Error Relatif $f(t) = \cos t$ . . . . .	34
Gambar 4.6 Nilai <i>Exercise</i> Optimal menggunakan Metode <i>Papoulis</i> dengan $D_0 = 0$ . . . . .	38
Gambar 4.7 Nilai <i>Exercise</i> Optimal menggunakan Metode <i>Papoulis</i> dengan Dividen . . . . .	42



## DAFTAR TABEL

	Hal
Tabel 4.1 Nilai Pasangan Parameter Metode <i>Papoulis</i> dengan Rata-rata Error Relatif di Bawah 5% pada Kelima Fungsi Sederhana .....	34
Tabel 4.2 Hasil Inversi Analitik Zhu .....	36
Tabel 4.3 Rata-rata Error Relatif Perhitungan Nilai <i>Exercise</i> Optimal pada <i>American Put Option</i> tanpa dividen .....	37
Tabel 4.4 Nilai $\bar{S}_f$ .....	39
Tabel 4.5 Nilai $\alpha_k$ .....	41
Tabel 4.6 Perbandingan Performansi .....	42



## DAFTAR LAMPIRAN

	Hal
LAMPIRAN A Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif $f(t) = 5$ . . . . .	49
LAMPIRAN B Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif $f(t) = e^{0.1t}$ . . . . .	53
LAMPIRAN C Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif $f(t) = t$ . . . . .	57
LAMPIRAN D Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif $f(t) = \sin t$ . . . . .	61
LAMPIRAN E Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif $f(t) = \cos t$ . . . . .	65
LAMPIRAN F Listing Program Metode <i>Papoulis</i> . . .	69
LAMPIRAN G Listing Program Metode <i>Gaver-Stehfest</i>	71



## Daftar Simbol

$\mathcal{L}$	Operator transformasi Laplace
$\mathcal{L}^{-1}$	Operator invers transformasi Laplace
$f(t)$	Fungsi dalam domain waktu
$\bar{f}(s)$	Fungsi dalam domain Laplace
$N$	Parameter metode <i>Papoulis</i> menyatakan banyaknya baris
$\rho$	Konstanta parameter metode <i>Papoulis</i>
$P_n(x)$	Polinomial Legendre berderajat $n$ dalam $x$
$\alpha_n$	Koefisien dalam polinomial Legendre
$(j)_m$	Simbol Pochhammer
$D_0$	Nilai dividen
$r$	Tingkat suku bunga
$\sigma$	Volatilitas dari <i>underlying asset</i>
$T$	Waktu kontrak
$X$	<i>Strike price</i>
$\tau$	Waktu menuju habisnya suatu kontrak ( <i>time to expiry</i> )
$\bar{S}_f$	Harga <i>exercise</i> optimal <i>American put option</i> dalam domain Laplace
$S_f$	Harga <i>exercise</i> optimal <i>American put option</i> dalam domain waktu
$\bar{a}_i$	Hasil inversi numerik metode <i>Papoulis</i> untuk menghitung rata-rata error relatif pada titik sampel ke- $i$
$a_i$	Hasil analitik untuk menghitung rata-rata error relatif pada titik sampel ke- $i$
$d$	Banyaknya titik sampel untuk menghitung rata-rata error relatif





# BAB I

## PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang permasalahan, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat dari tugas akhir ini.

### 1.1 Latar Belakang

Suatu pernyataan dalam variabel  $s$  yang dinotasikan dengan  $F(s)$ , dimana  $f(t)$  dan  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  membentuk suatu pasangan transformasi (*transform pair*) disebut sebagai transformasi Laplace. Ini berarti bahwa jika  $F(s)$  adalah transformasi Laplace dari  $f(t)$ , maka  $f(t)$  adalah invers transformasi Laplace dari  $F(s)$ . Kemampuan untuk mencari transformasi Laplace dari suatu pernyataan dan kemudian menginverskannya inilah yang membuat transformasi Laplace sangat berguna untuk menyelesaikan persamaan diferensial [1].

Invers transformasi Laplace dapat diselesaikan secara analitik menggunakan perhitungan yang telah ditabelkan dalam tabel transformasi Laplace untuk fungsi yang sederhana. Invers transformasi Laplace untuk fungsi yang lebih rumit sulit didapatkan secara analitik dengan memanipulasi ke dalam bentuk yang telah ada dalam tabel transformasi Laplace [2]. Dalam mengatasi permasalahan ini, diperlukan suatu metode pendekatan numerik dari invers transformasi Laplace [2]. Berbagai metode pendekatan numerik telah dikembangkan selama beberapa tahun terakhir untuk mendapatkan solusi semianalitik dari invers transformasi Laplace, diantaranya yaitu metode *Gaver-*

*Stehfest*, metode *Papoulis*, metode *Durbin-Crump*, metode *Weeks*, dan metode *Piessens* [3]. Solusi semianalitik ini berupa hasil pendekatan inversi numerik dari domain dalam fungsi Laplace [4].

Solusi numerik dari hasil invers transformasi Laplace sangat bermanfaat dalam berbagai aspek, salah satunya dalam perencanaan keuangan di bidang investasi [5]. Investasi merupakan penempatan sejumlah dana pada saat ini dengan harapan untuk memperoleh keuntungan di masa depan. Proses investasi terjadi pada pasar uang dan pasar modal. Pada pasar modal terdapat beberapa produk derivatif, dimana produk derivatif merupakan kontrak atau perjanjian yang nilai atau peluang keuntungannya bergantung dengan kinerja aset lain. Produk derivatif yang banyak dipergunakan adalah *future*, *forward*, *swaps*, dan *option*.

*Option* merupakan suatu perjanjian atau kontrak antara penjual dan pembeli *option*, dimana penjual *option* menjamin adanya hak (tetapi bukan kewajiban) dari pembeli *option* untuk membeli atau menjual aset tertentu pada waktu dan harga yang telah ditetapkan [6]. *Option* dapat digunakan untuk meminimalisasi risiko dan sekaligus memaksimalkan keuntungan dengan daya ungkit (*leverage*) yang lebih besar. Dengan membeli *option* memberi kesempatan untuk memperoleh keuntungan dari kenaikan harga sekuritas yang mendasarinya tanpa harus membeli sekuritas itu sendiri. Jika investor memiliki sekuritas yang mendasarinya, menjual *option* dapat memberi kesempatan untuk memperoleh pendapatan ekstra.

Terdapat dua jenis *option* berdasarkan bentuk hak yang terjadi yaitu *call option* dan *put option*. Dengan membeli *put option*, pembeli diperbolehkan untuk menjual *stock* pada masa mendatang dengan menggunakan harga yang telah disetujui pada saat sekarang. Jika *stock* tersebut melemah,

*put option* tersebut menjadi semakin bernilai dikarenakan akan kenyataan bahwa pembeli masih bisa untuk menjual *stock* tersebut pada harga yang lebih mahal yang telah disetujui dengan penjual dari *option*, jika pembeli harus menggunakan *option* tersebut.

Dalam *put option*, dikenal premi opsi (*option premium*) yang merupakan uang jaminan di awal kontrak dan harga pelaksanaan (*strike price* atau *exercise price*). Terdapat berbagai macam tipe *option* berdasarkan harga pelaksanaannya antara lain yaitu tipe Eropa dan tipe Amerika. Salah satu tipe *option* yang sering digunakan yaitu tipe Amerika (*American put option*), dimana harga pelaksanaannya dapat dilakukan kapan saja sampai dengan dan termasuk tanggal berakhirnya kontrak.

Salah satu pengaruh pembayaran harga opsi yaitu dividen yang dibayarkan. Dividen merupakan keuntungan penghasilan yang diberikan oleh emiten kepada para pemegang saham perusahaan atas pendapatan perusahaan sehingga terdapat kas yang keluar dari perusahaan. Sebagai akibatnya harga saham akan turun. Penurunan harga saham akan menaikkan nilai *put option*.

Persamaan *American put option* dengan dividen berada dalam ruang Laplace, sehingga diperlukan invers transformasi Laplace untuk mendapatkan solusi dari permasalahan tersebut [7]. Dalam Tugas Akhir ini, akan dibahas mengenai performansi salah satu metode pendekatan numerik invers transformasi Laplace yaitu metode *Papoulis* pada perhitungan nilai *American put option* dengan dividen. Dalam metode *Papoulis* ini, invers transformasi Laplace diperoleh sebagai perluasan deret dari polinomial *Legendre* berderajat  $2n$  dalam fungsi eksponensial  $e^{-\rho t}$ .

## 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang perlu untuk dikaji dalam tugas akhir ini adalah bagaimana mendapatkan performansi metode *Papoulis* pada perhitungan nilai *American put option* dengan dividen.

## 1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam tugas akhir ini adalah:

1. Nilai *American put option* yang digunakan mempunyai dividen.
2. *Underlying asset* yang diperjualbelikan adalah saham.
3. Volatilitas harga saham konstan.
4. Suku bunga bank bebas resiko, konstan dan berlaku sepanjang waktu *option*.

## 1.4 Tujuan

Tujuan dalam tugas akhir ini adalah mendapatkan performansi metode *Papoulis* pada perhitungan nilai *American put option* dengan dividen.

## 1.5 Manfaat

Manfaat dalam tugas akhir ini adalah mendapatkan performansi penggunaan metode *Papoulis* pada penghitungan nilai *American put option* dengan dividen dimana hasil performansi metode *Papoulis* ini diharapkan dapat memberikan kemudahan dalam menghitung nilai *American put option* dengan dividen.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai penelitian terdahulu dan teori-teori yang terkait dengan Tugas Akhir yaitu metode *Papoulis*, *option*, *dividen*, dan formula harga *exercise* optimal.

#### 2.1 Penelitian Terdahulu

Pada penelitian sebelumnya, Song-Ping Zhu, Jin Zhang, dan Y. C. Hon [5] telah melakukan penelitian mengenai teknik baru pendekatan numerik pada perhitungan nilai *American put option* berdasarkan pada transformasi Laplace. Mereka menggunakan salah satu metode invers Laplace yaitu metode *Gaver-Stehfest* untuk melakukan inversi numerik pada perhitungan nilai *American put option*. Mereka menyimpulkan bahwa metode yang mereka gunakan memiliki efisiensi komputasi yang lebih baik dibandingkan dengan metode binomial standar. Namun pada penelitian ini, mereka tidak melakukan perbandingan dengan beberapa metode invers Laplace yang lain.

Jin Zhang [7] selanjutnya melakukan penelitian mengenai perbandingan performansi beberapa metode invers Laplace pada perhitungan nilai *American put option* yaitu metode *Gaver-Stehfest*, metode *Papoulis* dan metode kombinasi linear *Kwok* dan *Barthez*. Penelitian yang mereka lakukan menyimpulkan metode *Gaver-Stehfest* lebih disarankan untuk perhitungan nilai *American put option* dibandingkan dengan metode kombinasi linear *Kwok* dan *Barthez* berdasarkan kecepatan komputasinya. Namun pada metode *Papoulis*, Jin Zhang hanya melakukan uji coba pada fungsi sederhana saja

dan tidak berlanjut pada penghitungan nilai *American put option*.

## 2.2 Metode *Papoulis*

Metode *Papoulis* berdasarkan pada perluasan  $f(t)$  menjadi deret eksponensial [8]:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n P_{2n}(e^{-\rho t})$$

dimana  $P_{2n}(e^{-\rho t})$  merupakan polinomial Legendre berderajat  $2n$  dalam  $e^{-\rho t}$ . Nilai  $\alpha_n$  merupakan koefisien dalam polinomial Legendre yang dapat dihitung dari rumus rekursi:

$$\rho \bar{f}[(2k+1)\rho] = \sum_{m=0}^k \frac{(k-m+1)_m}{2(k+\frac{1}{2})_{m+1}} \alpha_m$$

dengan  $k = n$  dan  $(j)_m$  merupakan simbol Pochhammer [3]:

$$\begin{aligned} (j)_m &= 1 && \text{untuk } m = 0 \\ &= j(j+1)\dots(j+m-1) && \text{untuk } m > 0. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan metode ini, terdapat dua parameter yang harus ditentukan yaitu  $N$  dan  $\rho$  dengan  $N$  merupakan bilangan bulat positif dan  $\rho$  merupakan bilangan real.

## 2.3 *Option*

*Option* adalah kontrak resmi antara *holder* dan *writer* yang memberikan hak (tanpa adanya kewajiban) kepada *holder* untuk membeli (*call option*) atau menjual (*put option*) sebuah *underlying asset* dengan harga tertentu (*exercise price/strike price*) dan pada waktu tertentu (*expiration date/maturity date*) sesuai dengan kesepakatan [6].

### 2.3.1 Terminologi dalam *option*

Komponen-komponen yang mendasari *option* dapat diuraikan sebagai berikut:

1. *Premium*

*Premium* adalah harga yang dibayar untuk kontrak awalnya oleh pembeli *option* kepada penjual *option*.

2. *Underlying asset*

*Underlying asset* adalah aset mendasar yang diperjualbelikan dalam transaksi *option*. Contoh: saham, obligasi, komoditi, dll. *Underlying asset* yang diperdagangkan dalam pasar *option* hanya tersedia untuk sekuritas-sekuritas tertentu dan indeks-indeks yang disetujui.

3. *Strike price/exercise price*

*Strike price/exercise price* adalah harga pembelian atau penjualan yang telah ditentukan untuk *underlying asset* jika *option* di-*exercise*. Untuk *put option*, *strike price* berarti harga yang harus dibayar (dibeli) pemilik *put option* pada saat jatuh tempo.

4. *Expiration date/maturity date*

*Expiration date/maturity date* adalah tanggal pada kontrak *option* yang dapat dilaksanakan transaksi (*exercise*) atau tanggal pada kontrak *option* yang diberikan kepada pemegang hak. Setelah melewati *expiration date* maka *option* dinyatakan kadaluarsa atau tidak dapat di-*exercise*.

5. *Intrinsic value*

*Intrinsic value* adalah suatu nilai nyata dari premi sebuah *option* yang merupakan selisih antara *strike price* dan harga *underlying asset*.

### 2.3.2 Mekanisme *option*

Terdapat dua jenis *option* berdasarkan bentuk hak yang terjadi antara lain:

1. *Call option*

*Call option* adalah sebuah kontrak *option* yang memberikan hak kepada *holder* untuk membeli suatu *asset* dalam jumlah tertentu pada waktu dan harga yang telah ditetapkan. Ada dua pihak dalam *call option* yaitu *call option buyer/long call* dan *call option seller/short call*.

2. *Put option*

*Put option* adalah sebuah kontrak *option* yang memberikan hak kepada *holder* untuk menjual suatu *asset* dalam jumlah tertentu pada waktu dan harga yang telah ditetapkan. Ada dua pihak dalam *put option* yaitu *put option buyer/long put* dan *put option seller/short put*.

### 2.3.3 Tipe *option*

Ada 2 macam tipe dari *stock options* yaitu opsi tipe Eropa/*European style option* dan opsi tipe Amerika/*American style option*. Nama-nama tersebut sama sekali tidak ada hubungannya dengan dimana *stock option* tersebut diperdagangkan, dimana sebagian besar dari bursa *stock option* terdagangkan adalah menggunakan *American style option*, bahkan di Eropa sekalipun. *European style option* dan *American style option* tidaklah sama. Hal ini ditinjau dari bagaimana cara penanganan mereka pada saat menggunakan *option*. Dengan menggunakan *option*, berarti kita menggunakan hak kita untuk membeli atau menjual *asset-asset* yang berada di bawahnya bersebanding dengan terminologi kontrak dari *stock option*. *European style option*, memperbolehkan pemegangnya untuk menggunakan *option*



setelah melampaui masa habis kadaluwarsanya, sedangkan *American style option* memperbolehkan pemegangnya untuk menggunakannya pada waktu yang mereka inginkan sebelum habis masa kadaluwarsanya. Fleksibilitas dari *American style option* inilah yang membuat harganya lebih mahal daripada *European style option* dan juga menciptakan permasalahan yaitu menemukan cara yang tepat untuk memberikan harga pada *American style option* tersebut.

### 2.3.4 Faktor *option*

Terdapat beberapa faktor yang mempengaruhi harga *option*, antara lain:

#### 1. Harga *underlying asset*

Harga *asset* yang mendasarinya/*underlying asset* dijadikan patokan dalam menentukan harga *option*. Harga suatu *call option* akan semakin tinggi apabila harga *underlying asset*-nya juga semakin tinggi. Dan sebaliknya harga *put option* akan semakin tinggi apabila *underlying asset*-nya semakin rendah. Hal ini menunjukkan bahwa harga *underlying asset* berbanding lurus dengan harga *call option* dan berbanding terbalik dengan harga *put option*.

#### 2. *Moneyness*

*Moneyness* merupakan perbedaan antara harga *underlying asset* saat ini dengan *strike price*. Suatu *put option* dan *call option* akan memiliki nilai apabila berada pada kondisi *in the money*. Sehingga harga *put option* tersebut semakin meningkat apabila *strike price*-nya tinggi dan berlaku sebaliknya pada *call option*.

#### 3. Jangka waktu jatuh tempo

Jangka waktu jatuh tempo mempengaruhi harga *option*.

Semakin panjang *time to expiry*, maka semakin tinggi harga *call option*, sedangkan harga *put option* semakin rendah.

#### 4. Volatilitas

Volatilitas atas *underlying asset* adalah ukuran tingkat ketidakpastian pergerakan *underlying asset* tersebut dimasa datang. Jika volatilitas semakin meningkat maka akan semakin meningkat pula peluang *underlying asset* mengalami peningkatan atau malah penurunan. Semakin besar volatilitas (semakin bergerak naik turun) semakin tinggi nilai *call option* dan *put option*.

5. Tingkat suku bunga bebas risiko/*risk free interest rate*  
Tingkat suku bunga bebas risiko/*risk free interest rate* juga mempengaruhi harga suatu *option*. Jika *interest rate* dalam perekonomian meningkat, maka akan mempengaruhi harapan kenaikan harga suatu *underlying asset*. Harga *put option* akan menurun dengan adanya peningkatan *risk free interest rate*. Begitu pula sebaliknya, *call option* akan meningkat.

## 2.4 Dividen

Dividen adalah pembagian laba kepada pemegang saham berdasarkan banyaknya saham yang dimiliki [6]. Pembagian ini akan mengurangi laba ditahan dan kas yang tersedia bagi perusahaan, tapi distribusi keuntungan kepada para pemilik saham memang tujuan utama suatu bisnis. Terdapat 4 jenis dividen, yaitu:

#### 1. Dividen tunai

Dibayarkan dalam bentuk tunai dan dikenai pajak pada tahun pengeluarannya.

#### 2. Dividen saham

Dibayarkan dalam bentuk saham tambahan, dihitung

berdasarkan proporsi terhadap jumlah saham yang dimiliki.

3. Dividen properti

Dibayarkan dalam bentuk aset.

4. Interim

Dibagikan sebelum tahun buku perseroan berakhir.

## 2.5 Formula Harga *Exercise* Optimal

Pada sub bab ini, akan dijelaskan mengenai penurunan rumus dari formula harga *exercise* optimal *American put option* yang telah dilakukan oleh Jin Zhang [7]. Nilai dari *American put option* bergantung pada beberapa parameter berikut, yaitu:

$D_0$  = nilai dividen,

$r$  = tingkat suku bunga,

$\sigma$  = volatilitas dari *underlying asset*,

$T$  = waktu kontrak,

$X$  = *strike price*.

*American option* juga dapat diuraikan sebagai *European option* dengan kondisi option dapat di-*exercise* lebih awal. Dalam hal ini, dapat dicari harga *exercise* optimal  $S_f(t)$  dimana *option* sebaiknya di-*exercise*. Sistem persamaan diferensial untuk menentukan nilai *American put option* dapat diberikan sebagai berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D_0)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \\ V(S_f(t), t) = X - S_f(t), \\ \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) = -1, \\ \lim_{S \rightarrow \infty} V(S, t) = 0, \\ V(S, T) = \max\{X - S, 0\}. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Untuk menyelesaikan Persamaan (2.1), dilakukan normalisasi semua variabel dalam sistem dengan memperkenalkan

beberapa variabel baru yaitu:

$$\tau = (T - t) \frac{\sigma^2}{2}, \quad \gamma = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad D = \frac{2D_0}{\sigma^2}, \quad V' = \frac{V}{X}, \quad S' = \frac{S}{X},$$

$$S_f'(\tau) = \frac{S_f(\tau)}{X}.$$

Normalisasi dari Persamaan (2.1) didapatkan sebagai berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial \tau} - S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - (\gamma - D) S \frac{\partial V}{\partial S} + \gamma V = 0, \\ V(S_f(\tau), \tau) = 1 - S_f(\tau), \\ \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(\tau), \tau) = -1, \\ \lim_{S \rightarrow \infty} V(S, \tau) = 0, \\ V(S, 0) = \max\{1 - S, 0\}. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Dalam Persamaan (2.2),  $V$  merupakan nilai *option*,  $S$  merupakan harga *underlying asset*,  $\tau$  merupakan sisa waktu kontrak.

Jika harga *underlying asset* berada di antara  $S_f$  dan *strike price*, maka *option* akan berada dalam kondisi *in the money* dan pemilik *option* akan memiliki kesempatan untuk melakukan *exercise* lebih awal. Oleh karena itu, dapat didefinisikan sebuah fungsi baru  $U$  yang menyatakan nilai *American put option* sebagai berikut:

$$U = \begin{cases} V + S - 1, & \text{jika } S_f \leq S < 1 \\ V, & \text{jika } S \geq 1. \end{cases}$$

Persamaan (2.2) yang bersesuaian dengan  $U$  didapatkan sebagai berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{S^2}{\gamma} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + (\gamma - D) \frac{S}{\gamma} \frac{\partial U}{\partial S} + DS = U + 1, \\ U(S_f(\tau), \tau) = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial S}(S_f(\tau), \tau) = 0, \\ U(S, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial U}{\partial \tau} + S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + (\gamma - D)S \frac{\partial U}{\partial S} - \gamma U = 0, \\ \lim_{S \rightarrow \infty} U(S, \tau) = 0, \\ U(S, 0) = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

Pengenalan dari fungsi  $U$  membuat sistem lebih mudah diselesaikan dalam ruang Laplace karena semua kondisi batas pada Persamaan (2.3) homogen. Untuk mempertahankan kontinuitas dari nilai *option* ketika harga *underlying asset* sama dengan *strike price* (misalnya  $S = 1$ ), diperlukan 2 kondisi tambahan pada  $U$  yaitu:

$$\lim_{S \rightarrow 1^-} U = \lim_{S \rightarrow 1^+} U, \quad (2.5)$$

$$\lim_{S \rightarrow 1^-} \frac{\partial U}{\partial S} = \lim_{S \rightarrow 1^+} \frac{\partial U}{\partial S} + 1. \quad (2.6)$$

Dengan menggunakan transformasi Laplace, penyelesaian dari Persamaan (2.3) hingga Persamaan (2.6) didapatkan sebagai berikut:

$$\begin{cases} S^2 \frac{d^2 \bar{U}}{dS^2} + (\gamma - D)S \frac{d\bar{U}}{dS} - (\gamma + p)\bar{U} = \frac{\gamma - DS}{p}, \\ \bar{U}(p\bar{S}_f, p) = 0, \\ \frac{d\bar{U}}{dS}(p\bar{S}_f, p) = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} S^2 \frac{d^2 \bar{U}}{dS^2} + (\gamma - D)S \frac{d\bar{U}}{dS} - (\gamma + p)\bar{U} = 0, \\ \lim_{S \rightarrow \infty} \bar{U}(S, p) = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \bar{U}(1^-, p) = \bar{U}(1^+, p), \\ \frac{d\bar{U}}{dS}(1^-, p) = \frac{d\bar{U}}{dS}(1^+, p) + \frac{1}{p}. \end{cases} \quad (2.9)$$

dengan  $p$  merupakan parameter Laplace. Persamaan (2.8) merupakan persamaan diferensial *Euler* yang akar-akarnya

dapat diperoleh sebagai berikut:

substitusi  $S = e^t$ , sehingga:

$$\begin{aligned} \ln S &= t \\ \frac{1}{S} &= \frac{dt}{dS} \end{aligned}$$

sehingga, turunan pertama  $\bar{U}$  terhadap  $S$  adalah:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{U}}{dS} &= \frac{d\bar{U}}{dt} \frac{dt}{dS} \\ &= \frac{d\bar{U}}{dt} \frac{1}{S} \end{aligned} \quad (2.10)$$

sedangkan turunan kedua  $\bar{U}$  terhadap  $S$  adalah:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{U}}{dS^2} &= \frac{d}{dS} \left( \frac{d\bar{U}}{dS} \right) \\ &= \frac{d}{dS} \left( \frac{d\bar{U}}{dt} \frac{1}{S} \right) \\ &= \frac{d \left( \frac{d\bar{U}}{dt} \right)}{dt} \frac{dt}{dS} \frac{1}{S} \\ &= \frac{d^2\bar{U}}{dt^2} \frac{1}{S^2} - \frac{1}{S^2} \frac{d\bar{U}}{dt} \\ &= \frac{1}{S^2} \left( \frac{d^2\bar{U}}{dt^2} - \frac{d\bar{U}}{dt} \right) \\ S^2 \frac{d^2\bar{U}}{dS^2} &= \frac{d^2\bar{U}}{dt^2} - \frac{d\bar{U}}{dt} \end{aligned} \quad (2.11)$$

misalkan operator  $\frac{d\bar{U}}{dt} = \mathcal{D}$ , maka berdasarkan persamaan (2.10) dan (2.11) diperoleh:

$$\begin{aligned} (\gamma - D)S\bar{U}' &= (\gamma - D)\mathcal{D}\bar{U} \\ S^2\bar{U}'' &= \mathcal{D}(\mathcal{D} - 1)\bar{U} \end{aligned}$$

sehingga persamaan (2.8) menjadi PD linier dengan koefisien konstan berikut:

$$[D^2 + (\gamma - D - 1)D - (\gamma + p)]\bar{U} = 0$$

dengan melakukan substitusi  $\bar{U} = e^{qt}$ , sehingga diperoleh persamaan karakteristik berikut:

$$q^2 + (\gamma - D - 1)q - (\gamma + p) = 0$$

$q_{1,2}$  merupakan akar-akar dari persamaan karakteristik yang telah diperoleh tersebut, yaitu:

$$q_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 + (p + \gamma)}$$

dengan

$$b = \frac{1 + D - \gamma}{2}.$$

Dengan menggunakan teknik standar, solusi dari Persamaan (2.7) dan Persamaan (2.8) dapat ditemukan sebagai berikut:

$$\bar{U} = \begin{cases} C_1 S^{q_1} + C_2 S^{q_2} + \frac{(DS - \gamma)p + (S - 1)\gamma D}{p(p + \gamma)(p + D)}, \\ C_3 S^{q_3} + C_4 S^{q_4}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Dalam Persamaan (2.12),  $C_1$  hingga  $C_4$  merupakan fungsi kompleks dari  $p$  yang berubah-ubah sesuai dengan kondisi batasnya. Untuk memenuhi kondisi batas pada Persamaan (2.8),  $C_3$  harus bernilai nol. Setelah semua kondisi batas pada Persamaan (2.7) dan Persamaan (2.8) ditentukan, diperoleh

satu set persamaan aljabar sebagai berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1(p\bar{S}_f)^{q_1} + C_2(p\bar{S}_f)^{q_2} + \frac{(Dp\bar{S}_f - \gamma)p + (p\bar{S}_f - 1)\gamma D}{p(p + \gamma)(p + D)} = 0, \\ C_1q_1(p\bar{S}_f)^{q_1-1} + C_2q_2(p\bar{S}_f)^{q_2-1} + \frac{D}{p(p + D)} = 0, \\ C_1(1)^{q_1} + C_2(1)^{q_2} - \frac{D - \gamma}{(p + \gamma)(p + D)} = C_4(1)^{q_2}, \\ C_1q_1(1)^{q_1} + C_2q_2(1)^{q_2} + \frac{D}{p(p + D)} = C_4q_2(1)^{q_2} + \frac{1}{p}. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Dalam Persamaan (2.13), terdapat tiga fungsi kompleks  $C$  yang bergantung pada  $\bar{S}_f$  dan  $p$ , yang mana  $\bar{S}_f$  hanya bergantung pada  $p$ . Setelah menyelesaikan Persamaan (2.13), didapatkan formula harga *exercise* optimal dari *American put option* dengan dividen dalam ruang Laplace sebagai berikut [7]:

$$\bar{S}_f(p)^{q_1} \frac{\gamma + p + (D - \gamma)q_2}{q_2(p + \gamma)(p + D)} + \bar{S}_f(p)D \frac{1 - q_2}{p^{q_1}q_2(p + D)} = -\frac{\gamma}{p^{1+q_1}(p + \gamma)}. \quad (2.14)$$



## BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam pengerjaan Tugas Akhir. Disamping itu, dijelaskan pula prosedur dan proses pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

### 3.1 Objek dan Aspek Penelitian

Objek penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah salah satu metode invers Laplace yaitu metode *Papoulis*. Sedangkan aspek yang digunakan dalam penelitian yaitu mendapatkan performansi metode *Papoulis* melalui uji coba fungsi sederhana dan penerapannya pada perhitungan nilai *American put option* dengan dividen.

### 3.2 Data Penelitian

Dalam tugas akhir ini, data parameter pada formula harga *exercise* optimal *American put option* yang digunakan adalah data abstrak yang diambil dari penelitian Jin Zhang [7].

### 3.3 Tahap Penelitian

Pada sub bab ini dijelaskan mengenai tahapan-tahapan yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini. Adapun langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir akan dijelaskan sebagai berikut:

1. Studi literatur

Pada tahapan ini dilakukan pengumpulan teori pendukung mengenai metode *Papoulis*, *American put option*, dan dividen.

2. Kajian metode *Papoulis*

Pada tahapan ini dilakukan penurunan rumus dari metode *Papoulis* yang digunakan dalam tugas akhir ini. Penurunan rumus metode *Papoulis* yang dilakukan berdasarkan pada definisi transformasi Laplace.

3. Uji coba fungsi sederhana

Pada tahapan ini dilakukan simulasi metode *Papoulis* pada fungsi sederhana untuk mengetahui tingkat akurasi dengan nilai error tekecil. Selain itu juga dicari nilai parameter pada metode *Papoulis* yang digunakan pada perhitungan nilai *American put option*.

4. Aplikasi formula harga *exercise* optimal pada metode *Papoulis*

Pada tahapan ini, dilakukan simulasi metode *Papoulis* pada perhitungan nilai *American put option* dengan dividen. Simulasi menggunakan *software* MATLAB.

5. Analisis performansi metode *Papoulis*

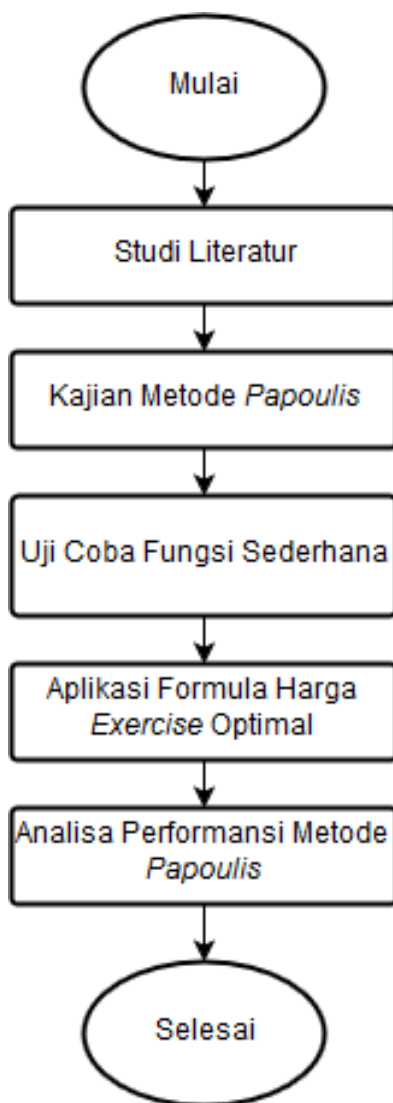
Pada tahapan ini dilakukan analisa performansi pada simulasi yang telah dilakukan untuk mengetahui performansi metode *Papoulis* pada perhitungan nilai *American put option* dengan dividen.

6. Penyusunan laporan

Dalam tahapan akhir tugas akhir ini penulis menyusun laporan sesuai dengan sistematika penulisan. Penulis melakukan penarikan kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan.

### 3.4 Diagram Alir Penelitian

Berdasarkan uraian tersebut diatas, tugas akhir ini dapat dinyatakan dalam diagram alir sebagai berikut:



Gambar 3.1: Diagram Alir Tahap Penelitian



## BAB IV

### ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas secara detail mengenai penerapan metode *Papoulis* untuk menghitung *American put option* dengan dividen. Pembahasan meliputi kajian metode *Papoulis*, uji coba fungsi sederhana, aplikasi formula harga *exercise* optimal pada perhitungan nilai *American put option* dengan dividen, serta analisis performansi metode *Papoulis*.

#### 4.1 Kajian metode *Papoulis*

Dalam sub bab ini dibahas mengenai penurunan rumus dari metode *Papoulis* yang akan digunakan dalam penghitungan nilai *American put option* dengan dividen. Tahapan penurunan rumus dari metode *Papoulis* diawali dengan definisi transformasi Laplace. Fungsi dalam definisi tersebut kemudian diubah ke dalam fungsi genap. Kemudian, dilakukan perluasan fungsi genap menjadi deret eksponensial polinomial Legendre berderajat genap dalam  $e^{-\rho t}$ . Selanjutnya polinomial Legendre tersebut ditransformasi Laplace sehingga menghasilkan fungsi dalam domain Laplace. Fungsi dalam domain Laplace ini dapat digunakan untuk mencari koefisien dalam polinomial Legendre yang akan digunakan dalam perhitungan invers transformasi Laplace secara numerik untuk mencari nilai fungsi dalam domain waktu.

Transformasi laplace dapat dinyatakan sebagai berikut [8]:

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (4.1)$$

Selanjutnya, dilakukan substitusi variabel baru dari variabel  $x = f(t)$  yang memenuhi syarat :

1.  $|f| < 1$
2.  $f$  satu-satu

Substitusi ini dilakukan untuk mendapatkan ekspansi dari  $f(t)$  ke deret polinomial Legendre. Sehingga dilakukan substitusi:

$$\begin{aligned} x &= e^{-\rho t}, & \text{dengan asumsi } \rho > 0 \\ dx &= -\rho e^{-\rho t} dt \\ dt &= -\frac{1}{\rho e^{-\rho t}} dx \end{aligned}$$

dan juga didapatkan:

$$\begin{aligned} \ln x &= \ln e^{-\rho t} \\ \ln x &= -\rho t \\ t &= -\frac{1}{\rho} \ln x \end{aligned}$$

Batas integral pada Persamaan (4.1) juga berubah menjadi:

$$\begin{aligned} t = 0 &\Rightarrow x = e^{-\rho \cdot 0} = e^0 = 1 \\ t = \infty &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} = 0 \end{aligned}$$

sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned} \bar{f}(s) &= - \int_1^0 \frac{1}{\rho} \frac{1}{e^{-\rho t}} e^{-st} f\left(-\frac{1}{\rho} \ln x\right) dx \\ &= \frac{1}{\rho} \int_0^1 e^{\rho t - st} f\left(-\frac{1}{\rho} \ln x\right) dx \\ &= \frac{1}{\rho} \int_0^1 e^{-\rho t \left(\frac{s}{\rho} - 1\right)} f\left(-\frac{1}{\rho} \ln x\right) dx \\ &= \frac{1}{\rho} \int_0^1 x^{\left(\frac{s}{\rho} - 1\right)} g(x) dx \end{aligned}$$

Dimisalkan  $s = (2k + 1)\rho$ , maka diperoleh:

$$\bar{f}[(2k + 1)\rho] = \frac{1}{\rho} \int_0^1 x^{2k} g(x) dx \quad (4.2)$$

Dimisalkan:

$$\begin{aligned} y &= -x \\ dy &= -dx \end{aligned}$$

dengan batas:

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow y = 0 \\ x = 1 &\Rightarrow y = -1 \end{aligned}$$

sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned} \bar{f}[(2k + 1)\rho] &= -\frac{1}{\rho} \int_0^{-1} (-y)^{2k} g(-y) dy \\ \bar{f}[(2k + 1)\rho] &= \frac{1}{\rho} \int_{-1}^0 (-y)^{2k} g(-y) dy \\ \bar{f}[(2k + 1)\rho] &= \frac{1}{\rho} \int_{-1}^0 (-x)^{2k} g(-x) dx \end{aligned}$$

Jika  $g(x)$  di  $[-1, 0]$  didefinisikan dengan:

$$g(-x) = g(x)$$

maka diperoleh:

$$\bar{f}[(2k + 1)\rho] = \frac{1}{\rho} \int_{-1}^0 x^{2k} g(x) dx \quad (4.3)$$

Penjumlahan Persamaan (4.2) dan Persamaan (4.3) menghasilkan:

$$\begin{aligned}\bar{f}[(2k+1)\rho] + \bar{f}[(2k+1)\rho] &= \frac{1}{\rho} \int_{-1}^0 x^{2k} g(x) dx + \frac{1}{\rho} \int_0^1 x^{2k} g(x) dx \\ 2\bar{f}[(2k+1)\rho] &= \frac{1}{\rho} \left\{ \int_{-1}^0 x^{2k} g(x) dx + \int_0^1 x^{2k} g(x) dx \right\} \\ 2\bar{f}[(2k+1)\rho] &= \frac{1}{\rho} \int_{-1}^1 x^{2k} g(x) dx\end{aligned}$$

sehingga:

$$\frac{1}{\rho} \int_{-1}^1 x^{2k} g(x) dx = \frac{2}{\rho} \int_{-1}^0 x^{2k} g(x) dx = \frac{2}{\rho} \int_0^1 x^{2k} g(x) dx$$

Diperoleh bahwa  $g(x)$  kontinu dan fungsi genap pada interval  $[-1, 1]$ .

Suatu fungsi  $g(x)$  yang kontinu pada interval  $(-1, 1)$  dapat dinyatakan sebagai deret dari polinomial Legendre:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n P_n(x)$$

Karena  $g(x)$  merupakan fungsi genap, maka berdasarkan sifat polinomial Legendre:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

yang mengakibatkan:

$$P_{2n}(-x) = (-1)^{2n} P_{2n}(x) = P_{2n}(x)$$

sehingga  $g(x)$  dapat didefinisikan ke dalam polinomial Legendre berderajat genap:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n P_{2n}(x)$$



atau secara ekivalen juga dapat dituliskan dalam bentuk:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n P_{2n}(e^{-\rho t}) \quad (4.4)$$

Yang menjadi masalah adalah "bagaimana menentukan nilai dari  $\alpha_n$  ?". Pertama, diketahui bahwa  $P_{2n}(e^{-\rho t})$  adalah sebuah polinomial Legendre genap berderajat  $2n$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P_{2n}(e^{-\rho t}) &= \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(4n-2m)!}{4^n m! (2n-m)! (2n-2m)!} e^{-\rho t(2n-2m)} \\ &= \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(4n-2m)!}{4^n m! (2n-m)! (2n-2m)!} e^{-2\rho t(n-m)} \end{aligned}$$

dimana  $e^{-2\rho t(n-m)}$  dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$e^{-2\rho t(n-m)} = e^{-2k\rho t}, \quad \text{dengan } k = 0, 1, \dots, n.$$

Diketahui bahwa:

$$\mathcal{L}\{e^{-2k\rho t}\} = \frac{1}{(s + 2k\rho)}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

sehingga didapatkan:

$$\bar{\phi}_{2n}(s) = \mathcal{L}\{P_{2n}(e^{-\rho t})\} = \frac{A(s)}{s(s + 2\rho) \dots (s + 2n\rho)},$$

dimana  $A(s)$  merupakan polinomial dengan derajat  $\leq n$ . Selanjutnya, polinomial Legendre mempunyai sifat ortogonalitas:

$$\int_{-1}^1 P_l(x).P_m(x)dx = 0, \quad \text{untuk } l \neq m.$$

sehingga didapatkan:

$$\int_0^1 x^{2k} \cdot P_{2n}(x) dx = 0, \quad \text{untuk } k < n. \quad (4.5)$$

Oleh karena itu, dari Persamaan (4.2) dan Persamaan (4.5) didapatkan:

$$\bar{\phi}_{2n}[(2k+1)\rho] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

dan akar-akar dari  $A(s)$  adalah:

$$(2k+1)\rho, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.6)$$

Kemudian, diperoleh:

$$\bar{\phi}_{2n}(s) = \frac{(s-\rho)(s-3\rho)\dots(s-(2n-1)\rho)}{s(s+2\rho)\dots(s+2n\rho)} A \quad (4.7)$$

dimana  $A$  dapat dinyatakan sebagai:

$$\int_0^1 x^{2k} \cdot P_{2n}(x) dx = A, \quad \text{untuk } k = n.$$

Dari persamaan (4.7), dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} s\bar{\phi}_{2n}(s) &= \frac{(s-\rho)(s-3\rho)\dots(s-(2n-1)\rho)}{(s+2\rho)\dots(s+2n\rho)} A \\ s\bar{\phi}_{2n}(s) &= \frac{s^n(1-\frac{\rho}{s})(1-\frac{3\rho}{s})\dots(1-(2n-1)\frac{\rho}{s})}{s^n(1+\frac{2\rho}{s})(1+\frac{4\rho}{s})\dots(1+2n\frac{\rho}{s})} A \\ s\bar{\phi}_{2n}(s) &= \frac{(1-\frac{\rho}{s})(1-\frac{3\rho}{s})\dots(1-(2n-1)\frac{\rho}{s})}{(1+\frac{2\rho}{s})(1+\frac{4\rho}{s})\dots(1+2n\frac{\rho}{s})} A \\ \lim_{s \rightarrow \infty} s\bar{\phi}_{2n}(s) &= A \end{aligned}$$

Nilai dari  $A$  dapat dicari dengan menggunakan teorema nilai awal. Teorema nilai awal menyatakan bahwa [8]:

Jika  $s \rightarrow \infty$ ,  $\bar{f}(s) \rightarrow 0$ , dan juga,

$$f(t) \rightarrow f(0) \text{ ketika } t \rightarrow 0$$

dan

$$e^{-st} \cdot f(t) \rightarrow 0 \text{ ketika } t \rightarrow \infty$$

maka dapat diperoleh:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s\bar{f}(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

Berdasarkan teorema nilai awal, dapat diperoleh:

$$A = \lim_{s \rightarrow \infty} s\bar{\phi}_{2n}(s) = \lim_{t \rightarrow 0} P_{2n}(e^{-\rho t}) = P_{2n}(1) = 1$$

sehingga, transformasi Laplace dari  $P_{2n}(e^{-\rho t})$  dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\bar{\phi}_{2n}(s) = \frac{(s - \rho)(s - 3\rho) \dots (s - (2n - 1)\rho)}{s(s + 2\rho) \dots (s + 2n\rho)}$$

Transformasi Laplace dari Persamaan (4.4) dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\bar{f}(s) = \frac{\alpha_0}{s} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(s - \rho) \dots (s - (2n - 1)\rho)}{s \dots (s + 2n\rho)} \alpha_n. \quad (4.8)$$

Dengan melakukan substitusi  $s = \rho, 3\rho, \dots, (2n - 1)\rho$  menghasilkan persamaan sistem segitiga:

$$\begin{aligned}
 \rho \bar{f}(\rho) &= \alpha_0 \\
 \rho \bar{f}(3\rho) &= \frac{\alpha_0}{3} + \frac{2\alpha_1}{3.5} \\
 &\vdots \\
 \rho \bar{f}[(2n-1)\rho] &= \frac{\alpha_0}{2n-1} + \frac{2(n-1)\alpha_1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots \\
 &\quad + \frac{(2n-2)(2n-4)\dots 2\alpha_{n-1}}{(2n-1)(2n+1)\dots(4n-1)} \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.6), maka Persamaan (4.9) dapat dituliskan ke dalam bentuk lain sebagai berikut:

$$\rho \bar{f}[(2k+1)\rho] = \sum_{m=0}^k \frac{(k-m+1)_m}{2(k+\frac{1}{2})_{m+1}} \alpha_m$$

dengan  $k = n$   $(j)_m$  merupakan simbol Pochhammer [3]:

$$\begin{aligned}
 (j)_m &= 1 && \text{untuk } m = 0 \\
 &= j(j+1)\dots(j+m-1) && \text{untuk } m > 0.
 \end{aligned}$$

#### **Contoh 4.1** Penerapan Metode *Papoulis*

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s - 0.1}$$

Parameter metode *Papoulis* yang digunakan yaitu  $N = 2$  dan  $\rho = 0.2$ . Kemudian, dengan menggunakan Persamaan (4.8) didapatkan persamaan sistem segitiga:

$$\begin{aligned}
 0.2 \frac{1}{0.2 - 0.1} &= \alpha_0 \\
 0.2 \frac{1}{0.6 - 0.1} &= \frac{\alpha_0}{3} + \frac{2\alpha_1}{3.5}
 \end{aligned}$$

Kemudian, dapat dibentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.333 & 0.133 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$

Kemudian nilai dari  $\alpha$  dapat dicari sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.333 & 0.133 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dari Persamaan (4.4) dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^1 \alpha_n P_{2n}(e^{-0.2t}) \\ f(1) &= \sum_{n=0}^1 \alpha_n P_{2n}(e^{-0.2}) \\ f(1) &= \alpha_0 P_0(e^{-0.2}) + \alpha_1 P_2(e^{-0.2}) \\ f(1) &= 2.1 + (-2) \cdot (0.505) = 0.989 \end{aligned}$$

## 4.2 Uji Coba Fungsi Sederhana

Sebuah metode inversi bergantung pada parameter yang ada dalam inversi numerik tersebut. Idealnya, hasil inversi numerik tidak boleh sensitif terhadap berbagai variasi nilai parameter. Namun, karena sifat inversi Laplace yang tidak stabil, uji parametrik untuk sensitivitas metode terhadap berbagai nilai parameter yang berbeda perlu untuk dilakukan. Dalam tugas akhir ini, sensitivitas dari metode *Papoulis* akan diuji terhadap lima fungsi sederhana. Untuk menentukan parameter metode *Papoulis* yang sesuai dengan permasalahan *option*, fungsi sederhana yang akan diuji dibatasi pada fitur waktu yang kecil.

Lima fungsi sederhana yang akan diuji untuk transformasi inversi Laplace metode *Papoulis* yaitu:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{s}\right) = 5 \quad (4.10)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-0.1}\right) = e^{0.1t} \quad (4.11)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = t \quad (4.12)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin t \quad (4.13)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \cos t \quad (4.14)$$

Kriteria yang digunakan untuk menentukan parameter yang tepat dari metode *Papoulis* adalah error relatif dari parameter yang ditentukan harus kurang dari toleransi error yang telah ditetapkan. Selanjutnya metode *Papoulis* akan diterapkan pada perhitungan nilai dari lima fungsi sederhana tersebut untuk mendapatkan nilai inversi numerik dalam domain waktu. Hasil inversi numerik tersebut dapat digunakan untuk mengetahui tingkat akurasi metode *Papoulis*. Tingkat akurasi yang dimaksud dapat diukur dengan mengambil rata-rata error relatif dari nilai yang telah dihitung. Rata-rata error relatif dapat didefinisikan sebagai berikut:

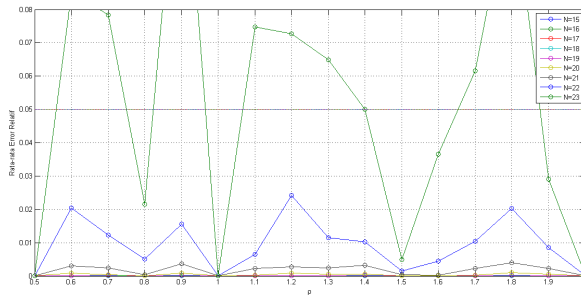
$$AveRelErr = \left( \sum_{i=1}^d |(\bar{a}_i - a_i)/a_i| \right) / d \quad (4.15)$$

dimana  $\bar{a}_i$  merupakan hasil inversi numerik dan  $a_i$  merupakan hasil analitik pada waktu ke- $i$ , serta  $d$  merupakan banyaknya titik sampel yang dihitung. Dalam uji coba fungsi sederhana yang akan dijelaskan dalam tugas akhir ini,  $d$  yang digunakan adalah 5 dengan nilai  $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$  dan toleransi error

yang ditentukan yaitu 5%. Ini berarti jika rata-rata error relatif di atas 5% setelah diuji dengan lima fungsi sederhana, maka parameter yang digunakan dianggap memiliki tingkat akurasi yang kurang baik. Beberapa parameter yang memiliki rata-rata error relatif kurang dari 5% pada kelima fungsi sederhana akan dipilih untuk diterapkan pada permasalahan penghitungan nilai *American put option* dengan dividen.

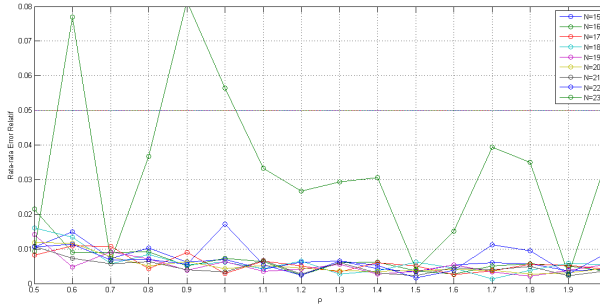
Beberapa nilai  $N$  dan  $\rho$  yang berbeda akan digunakan dalam uji coba fungsi sederhana ini untuk mendapatkan parameter  $N$  dan  $\rho$  yang sesuai dari metode *Papoulis*. Batasan nilai  $N$  yang digunakan yaitu  $N = 15, 16, 17, \dots, 23$  dan batasan nilai  $\rho$  yang digunakan yaitu  $\rho = 0.5, 0.6, 0.7, \dots, 2$ .

Pada uji coba fungsi sederhana Persamaan (4.10), metode *Papoulis* memiliki tingkat akurasi yang cukup baik untuk berbagai nilai  $N$  dan  $\rho$ . Dengan kata lain, nilai  $N$  dan  $\rho$  yang berbeda tidak banyak berpengaruh terhadap sensitivitas hasil inversi numerik karena rata-rata error relatif tidak sensitif terhadap berbagai nilai  $N$  dan  $\rho$  yang berbeda. Rata-rata error relatif memiliki nilai di atas 5% ketika  $N = 23$  dengan  $\rho = 0.6, 0.7, 0.9, 1.1, 1.2, 1.3, 1.7, 1.8$ . Grafik nilai rata-rata error relatif dari hasil uji coba Persamaan (4.10) ditunjukkan pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1: Plot Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = 5$

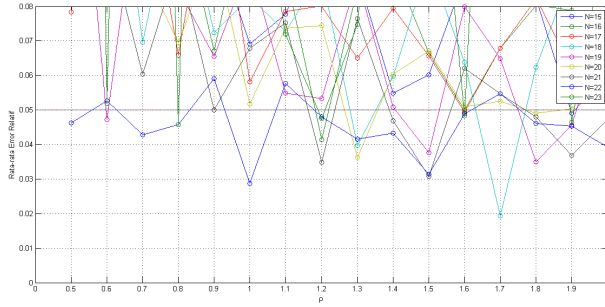
Pada uji coba fungsi sederhana Persamaan (4.11), metode *Papoulis* juga memiliki tingkat akurasi yang cukup baik untuk berbagai nilai  $N$  dan  $\rho$ . Dengan kata lain, nilai  $N$  dan  $\rho$  yang berbeda tidak banyak berpengaruh terhadap sensitivitas hasil inversi numerik karena rata-rata error relatif tidak sensitif terhadap berbagai nilai  $N$  dan  $\rho$  yang berbeda. Rata-rata error relatif memiliki nilai di atas 5% ketika  $N = 23$  dengan  $\rho = 0.6, 0.9, 1$ . Grafik nilai rata-rata error relatif dari hasil uji coba Persamaan (4.11) ditunjukkan pada Gambar 4.2.



Gambar 4.2: Plot Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = e^{0.1t}$

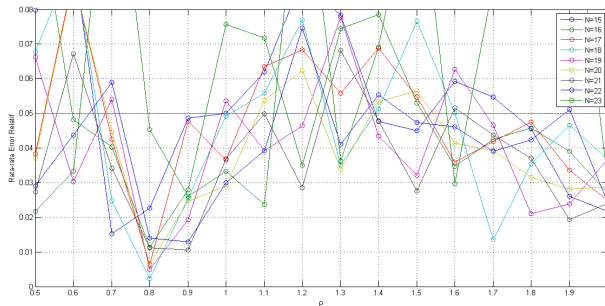
Pada uji coba fungsi sederhana Persamaan (4.12), parameter nilai  $N$  dan  $\rho$  yang berbeda pada metode *Papoulis* banyak berpengaruh terhadap sensitivitas hasil inversi numerik karena rata-rata error relatif sangat sensitif terhadap berbagai nilai  $N$  dan  $\rho$  yang berbeda. Rata-rata error relatif memiliki nilai di bawah 5% pada 34 nilai pasangan parameter  $N$  dan  $\rho$  yang bersesuaian seperti yang terlihat pada Gambar 4.3. Grafik nilai rata-rata error relatif dari hasil uji coba Persamaan (4.12) ditunjukkan pada Gambar 4.3.



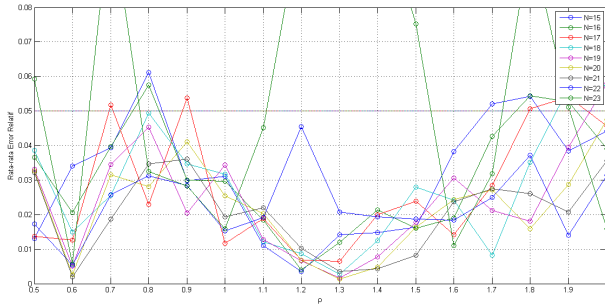


Gambar 4.3: Plot Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = t$

Sedangkan untuk Persamaan (4.13) dan Persamaan (4.14), metode *Papoulis* memiliki tingkat akurasi yang cukup baik untuk nilai parameter  $N$  dan  $\rho$  tertentu. Grafik nilai rata-rata error relatif dari hasil uji coba Persamaan (4.13) dan Persamaan (4.14) secara berurutan ditunjukkan pada Gambar 4.4 dan Gambar 4.5.



Gambar 4.4: Plot Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = \sin t$



Gambar 4.5: Plot Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = \cos t$

Berdasarkan hasil uji coba kelima fungsi sederhana di atas, terdapat 28 nilai pasangan parameter yang memiliki nilai rata-rata error relatif di bawah 5% untuk kesemua lima fungsi sederhana yang diuji. 28 nilai pasangan parameter yang memenuhi rata-rata error relatif di bawah 5% ditunjukkan pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1: Nilai Pasangan Parameter Metode *Papoulis* dengan Rata-rata Error Relatif di Bawah 5% pada Kelima Fungsi Sederhana

No	$(N, \rho)$	No	$(N, \rho)$	No	$(N, \rho)$	No	$(N, \rho)$
1	(15,1.9)	8	(19,1.5)	15	(21,1.5)	22	(22,1.3)
2	(16,1.2)	9	(19,1.8)	16	(21,1.8)	23	(22,1.5)
3	(16,1.6)	10	(19,1.9)	17	(21,1.9)	24	(22,1.6)
4	(17,1.6)	11	(20,1.3)	18	(21,2)	25	(22,1.8)
5	(18,1.3)	12	(20,1.8)	19	(22,0.5)	26	(22,2)
6	(18,1.7)	13	(21,1.2)	20	(22,0.8)	27	(23,0.8)
7	(19,0.6)	14	(21,1.4)	21	(22,1)	28	(23,1.6)

28 nilai pasangan parameter  $(N, \rho)$  inilah yang akan dipilih dan digunakan pada aplikasi terhadap permasalahan harga

*exercise optimal American put option.*

### 4.3 Aplikasi Formula Harga *Exercise Optimal*

Setelah melakukan uji coba fungsi sederhana pada sub bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa 28 nilai pasangan parameter  $(N, \rho)$  yang terdapat pada Tabel 4.1 merupakan beberapa pasangan parameter yang paling sesuai untuk metode *Papoulis* yang akan diterapkan pada permasalahan penentuan harga *exercise optimal American put option* dengan karakteristik waktu yang kecil. Dalam sub bab berikut ini, akan dibahas mengenai aplikasi metode *Papoulis* dengan 28 nilai pasangan parameter  $(N, \rho)$  tersebut pada penentuan harga *exercise optimal American put option*. Selain itu, penulis menggunakan *software* MATLAB untuk menghitung nilai  $\bar{S}_f$  untuk setiap nilai  $p$  yang diberikan. Kemudian, penulis menggunakan metode *Papoulis* pada  $\bar{S}_f$  untuk mendapatkan nilai  $S_f$  dalam domain waktu.

Untuk menguji tingkat akurasi metode *Papoulis*, pertama akan dibandingkan hasil numerik metode *Papoulis* dengan hasil inversi secara analitik yang telah berhasil dilakukan oleh Zhu [7] pada penghitungan nilai *exercise optimal American put option* tanpa pembayaran dividen. Jadi, pertama-tama penulis akan menggunakan contoh yang sama seperti yang digunakan oleh Zhu [7] dengan tujuan untuk menentukan tingkat akurasi metode *Papoulis*.

Parameter pada Persamaan (2.14) yang digunakan dalam contoh ini, yaitu:  $\gamma = 2.222$  dan  $D = 0$  dengan  $\sigma = 30\%$ , yang bersesuaian dengan waktu kontrak *option* yang berlaku selama 1 tahun. Data hasil inversi analitik yang telah dilakukan oleh Zhu [7] ditunjukkan pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2: Hasil Inversi Analitik Zhu

No	$\tau$	Hasil Inversi Analitik
1	0.005	0.84830692
2	0.010	0.81923386
3	0.015	0.80187124
4	0.020	0.78790613
5	0.025	0.77928012
6	0.030	0.77144913
7	0.035	0.76493095
8	0.040	0.75938297
9	0.045	0.75458026

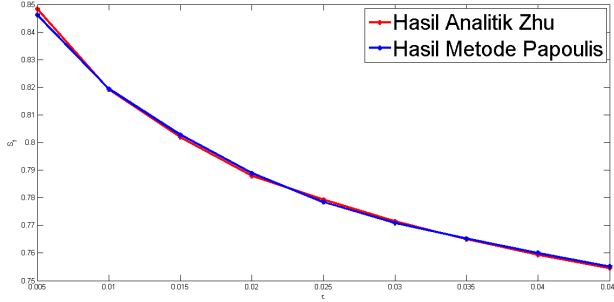
Kemudian penulis melakukan uji coba tingkat akurasi 28 nilai pasangan parameter  $(N, \rho)$  metode *Papoulis* pada perhitungan nilai *exercise* optimal *American put option* tanpa dividen yang telah dilakukan oleh Zhu [7]. Tingkat akurasi yang dimaksud dapat diukur dengan mengambil rata-rata error relatif dari nilai hasil inversi analitik pada Tabel 4.2. Hasil perhitungan nilai rata-rata error relatif 28 nilai pasangan parameter  $(N, \rho)$  metode *Papoulis* pada perhitungan nilai *exercise* optimal *American put option* tanpa dividen ditunjukkan pada Tabel 4.3

Tabel 4.3: Rata-rata Error Relatif Perhitungan Nilai *Exercise* Optimal pada *American Put Option* tanpa dividen

No	$(N, \rho)$	AvgER	No	$(N, \rho)$	AvgER
1	(15,1.9)	0.0015	15	(21,1.5)	0.0023
2	(16,1.2)	0.0019	16	(21,1.8)	0.0098
3	(16,1.6)	0.0016	17	(21,1.9)	0.0536
4	(17,1.6)	0.0013	18	(21,2)	0.0259
5	(18,1.3)	0.0015	19	(22,0.5)	0.1147
6	(18,1.7)	0.0012	20	(22,0.8)	0.2110
7	(19,0.6)	0.0030	21	(22,1)	0.0452
8	(19,1.5)	0.0017	22	(22,1.3)	0.0242
9	(19,1.8)	0.0010	23	(22,1.5)	0.0810
10	(19,1.9)	9.8558e-004	24	(22,1.6)	0.6059
11	(20,1.3)	0.0011	25	(22,1.8)	0.1302
12	(20,1.8)	9.9331e-004	26	(22,2)	0.2669
13	(21,1.2)	0.0034	27	(23,0.8)	1.3807
14	(21,1.4)	0.0024	28	(23,1.6)	3.9174

Tabel 4.3 menunjukkan ketika  $N = 19$  dan  $\rho = 1.9$ , metode *Papoulis* menunjukkan nilai rata-rata error relatif terkecil. Nilai rata-rata error relatif yang sangat kecil ini menunjukkan bahwa metode *Papoulis* dengan parameter  $N = 19$  dan  $\rho = 1.9$  bekerja sangat baik dalam permasalahan penentuan nilai *exercise* optimal *American put option*. Dalam sub bab berikutnya, penulis juga akan menggunakan parameter  $N = 19$  dan  $\rho = 1.9$  pada perhitungan nilai *exercise* optimal *American put option* dengan dividen. Dalam Gambar 4.6, penulis menunjukkan hasil plot hasil nilai  $S_f$  dengan  $\tau$ . Dari gambar tersebut terlihat bahwa

kurva hasil perhitungan metode *Papoulis* dengan  $N = 19$  dan  $\rho = 1.9$  cukup sesuai dengan kurva inversi pendekatan analitis Zhu.



Gambar 4.6: Nilai *Exercise* Optimal menggunakan Metode *Papoulis* dengan  $D_0 = 0$

#### 4.4 Analisa Performansi Metode *Papoulis*

Dalam sub bab ini, akan dibahas mengenai analisa performansi metode *Papoulis* pada perhitungan nilai *exercise* optimal *American put option* dengan dividen. Untuk menguji performansi metode *Papoulis*, pertama akan dibandingkan hasil numerik metode *Papoulis* yang akan dilakukan dengan hasil numerik metode *Gaver-Stehfest* yang telah diteliti oleh Jin Zhang [7]. Alasan penulis memilih metode *Gaver-Stehfest* untuk dibandingkan karena metode *Gaver-Stehfest* merupakan metode invers transformasi Laplace yang telah berhasil diterapkan pada perhitungan nilai *exercise* optimal *American put option* dengan dividen.

Diketahui bahwa formula harga *exercise* optimal dari *American put option* dengan dividen dalam ruang Laplace

diberikan sebagai berikut [7]:

$$\bar{S}_f(p)^{q_1} \frac{\gamma + p + (D - \gamma)q_2}{q_2(p + \gamma)(p + D)} + \bar{S}_f(p)D \frac{1 - q_2}{p^{q_1}q_2(p + D)} = -\frac{\gamma}{p^{1+q_1}(p + \gamma)}$$

Kemudian penulis akan menggunakan contoh yang sama seperti yang digunakan Jin Zhang untuk mengetahui performansi metode *Papoulis*. Parameter pada formula harga *exercise* optimal *American put option* dengan dividen yang digunakan oleh Jin Zhang dalam perhitungan ini yaitu: *strike price*  $X = \$100$ , tingkat suku bunga  $r = 5\%$ , nilai dividen  $D_0 = 5\%$ , volatilitas dari *underlying asset*  $\sigma = 30\%$ , waktu kontrak *option* berlaku selama 1 tahun dan waktu menuju berakhirnya kontrak  $\tau = 0.006116$  ( $t = 0.864$ ). Selanjutnya metode *Papoulis* dengan parameter  $N = 19$  dan  $\rho = 1.9$  akan diterapkan pada formula harga *exercise* optimal *American put option* dengan dividen dengan menggunakan parameter-parameter tersebut.

Pertama-tama, dilakukan pencarian nilai akar  $\bar{S}_f$  untuk setiap nilai  $p$  yang diberikan dengan menggunakan bantuan *software* MATLAB. Hasil nilai  $\bar{S}_f$  ditunjukkan pada Tabel 4.4.

Tabel 4.4: Nilai  $\bar{S}_f$

$k$	$\bar{S}_f$	$k$	$\bar{S}_f$	$k$	$\bar{S}_f$	$k$	$\bar{S}_f$
0	0.2364	5	0.0280	10	0.0159	15	0.0113
1	0.0878	6	0.0242	11	0.0147	16	0.0107
2	0.0560	7	0.0214	12	0.0136	17	0.0101
3	0.0417	8	0.0191	13	0.0127	18	0.0096
4	0.0334	9	0.0174	14	0.0119		

Kemudian, dengan menggunakan Persamaan (4.8) didapatkan persamaan sistem segitiga:

$$\begin{aligned}
 (1.9)(0.0878) &= \alpha_0 \\
 (1.9)(0.0560) &= \frac{\alpha_0}{3} + \frac{2\alpha_1}{3.5} \\
 &\vdots \\
 (1.9)(0.0096) &= \frac{\alpha_0}{37} + \frac{36\alpha_1}{37.39} + \dots + \frac{36.34\dots 2\alpha_{18}}{37.39\dots 73}
 \end{aligned}$$

Kemudian, dapat dibentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 0.4492 \\ 0.1668 \\ \vdots \\ 0.0183 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0.333 & 0.133 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0.0270 & 0.0249 & \dots & 2.1273e - 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{18} \end{bmatrix}$$

Kemudian nilai dari  $\alpha$  dapat dicari sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0.333 & 0.133 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0.0270 & 0.0249 & \dots & 2.1273e - 12 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.4492 \\ 0.1668 \\ \vdots \\ 0.0183 \end{bmatrix}$$

Hasil nilai  $\alpha$  ditunjukkan pada Tabel 4.5.



Tabel 4.5: Nilai  $\alpha_k$ 

$n$	$\alpha_n$	$n$	$\alpha_n$	$n$	$\alpha_n$	$n$	$\alpha_n$
0	0.4492	5	0.0285	10	0.0103	15	0.0060
1	0.1284	6	0.0210	11	0.0095	16	0.0049
2	0.0721	7	0.0182	12	0.0078	17	0.0057
3	0.0522	8	0.0142	13	0.0074	18	9.0578e-05
4	0.0350	9	0.0128	14	0.0062		

Selanjutnya, dengan menggunakan Persamaan (4.4) dapat diperoleh:

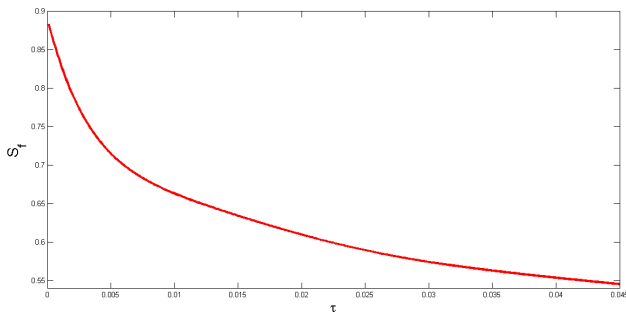
$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{n=0}^1 \alpha_n P_{2n}(e^{-1.9t}) \\
 f(0.006116) &= \sum_{n=0}^{18} \alpha_n P_{2n}(e^{-(1.9)(0.006116)}) \\
 f(0.006116) &= \alpha_0 P_0(e^{-0.001162}) + \alpha_1 P_2(e^{-0.001162}) \\
 &\quad + \dots + \alpha_{18} P_{36}(e^{-0.001162}) \\
 f(0.006116) &= 0.6989
 \end{aligned}$$

Perhitungan metode *Papoulis* yang diterapkan pada formula harga *exercise* optimal *American put option* dengan dividen menghasilkan nilai *exercise* optimal  $S_f = 0.6989\$100 = \$69.89$ . Tabel 4.6 menunjukkan perbandingan performansi pada perhitungan nilai  $S_f$  pada mesin Intel Core i3, 1.8 GHz, menggunakan metode *Gaver-Stehfest* dan metode *Papoulis*. Penulis menggunakan *software* MATLAB 7.10.0 untuk mendapatkan performansi dari kedua metode pada perhitungan nilai *American put option* dengan dividen.

Tabel 4.6: Perbandingan Performansi

<i>Gaver-Stehfest</i>		<i>Papoulis</i>	
$S_f(\$)$	Kec. Komputasi (detik)	$S_f(\$)$	Kec. Komputasi (detik)
70.31	0.011348	69.89	0.031196

Dari Tabel 4.6, dapat dilihat bahwa kecepatan komputasi dari metode *Papoulis* sedikit lebih lambat dibandingkan dengan kecepatan komputasi metode *Gaver-Stehfest*. Namun, nilai  $S_f$  yang dihasilkan oleh perhitungan metode *Papoulis* lebih rendah daripada nilai  $S_f$  yang dihasilkan metode *Gaver-Stehfest*. Hasil plot dari metode *Papoulis* untuk penghitungan nilai *American put option* dengan dividen menggunakan parameter *option* yang telah disebutkan di atas dapat dilihat pada Gambar 4.7.



Gambar 4.7: Nilai *Exercise* Optimal menggunakan Metode *Papoulis* dengan Dividen

Setelah melakukan pembahasan mengenai performansi metode *Papoulis*, metode *Papoulis* merupakan metode yang cukup baik untuk permasalahan penentuan nilai *exercise* optimal *American put option*. Terdapat beberapa keuntungan dalam menggunakan metode *Papoulis*. Pertama, metode *Papoulis* memiliki tingkat akurasi yang baik untuk rentang waktu yang kecil. Kedua, keseluruhan gagasan metode *Papoulis* adalah untuk menjaga inversi numerik sederhana dan efisien, yang merupakan daya tarik khusus bagi para praktisi pasar. Namun, metode *Papoulis* membutuhkan 2 parameter  $N$  dan  $\rho$  sehingga cukup rumit untuk menentukan nilai optimal dari kedua parameter tersebut.



## BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari Tugas Akhir ini serta saran untuk penelitian selanjutnya.

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya, terdapat 28 nilai pasangan parameter  $(N, \rho)$  pada metode *Papoulis* yang memiliki tingkat akurasi yang baik untuk menyelesaikan fungsi sederhana yang berada dalam ruang Laplace. Kemudian 28 nilai pasangan parameter  $(N, \rho)$  tersebut diterapkan pada penghitungan nilai *exercise* optimal *American put option* tanpa dividen dan didapatkan bahwa parameter metode *Papoulis* yang cocok digunakan dalam permasalahan penghitungan nilai *exercise* optimal *American put option* yaitu  $N = 19$  dan  $\rho = 1.9$ . Selanjutnya dilakukan analisa performansi metode *Papoulis* dengan parameter  $N = 19$  dan  $\rho = 1.9$  yang diterapkan pada perhitungan nilai *exercise* optimal *American put option* dengan dividen menghasilkan nilai *exercise* optimal bagi pembeli *option* sebesar \$69.89 dengan kecepatan komputasi 0.031196 detik.

### 5.2 Saran

Saran dari tugas akhir ini yaitu, pada tugas akhir ini hanya meneliti pada perhitungan nilai *exercise* optimal *American put option* saja. Untuk penelitian selanjutnya dapat diteliti mengenai penerapan metode *Papoulis* pada perhitungan nilai *exercise* optimal *American call option* untuk

mengetahui performansi metode *Papoulis* pada berbagai mekanisme *option*.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ruggeri, R. (2004). **The Laplace Transform in Option Pricing**. (Thesis). Venezia: Universita CaFoscari.
- [2] Zhan, H. and Wang, Q. (2014). *On Different Numerical Inverse Laplace Methods for Solute Transport Problem*. Advances in Water Resources. Elsevier Ltd.
- [3] Cheng, A. and Sidauruk P. (1994). *Approximate Inversion of the Laplace Transform. The Matematica Journal*. Miller Freeman Publication.
- [4] Chiang, L. (1994). **The Application of Numerical Laplace Inversion Methods to Groundwater Flow and Solute Transport Problems**. (Thesis). Soccoro: New Mexico Institute of Mining and Technology.
- [5] Hon, Y.C. and Zhang, J. and Zhu S. (2006). *Numerical Valuation of American Puts On a Dividend Paying Asset*. Financial System Engineering IV-Vol 9. Hong Kong: Global-Link Publisher.
- [6] Seleky, J.S. (2012). **Penentuan Nilai Opsi Call Barrier dengan Dividen Tunggal di Bursa Efek Indonesia**. (Thesis). Bogor: Institut Pertanian Bogor.
- [7] Zhang, J. (2007). **Some Innovative Numerical Approaches for Pricing American Options**. (Thesis). Australia: School of Mathematics and Applied Statistics, University of Wollongong.

- [8] Cohen, A.M. (2007). **Numerical Methods for Laplace Transform Inversion**. New York: Springer Science+Business Media, LLC.



**LAMPIRAN A**  
**Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = 5$**

	$\rho=0.1$	$\rho=0.2$	$\rho=0.3$	$\rho=0.4$	$\rho=0.5$
N=1	0	0	0	0	0
N=2	0	0	2.13E-16	0	1.07E-16
N=3	0	0	3.91E-16	0	4.97E-16
N=4	1.14E-15	1.28E-15	1.92E-15	9.24E-16	1.67E-15
N=5	9.41E-15	7.39E-15	9.20E-15	9.17E-15	9.91E-15
N=6	2.71E-14	2.48E-14	2.80E-14	2.35E-14	2.79E-14
N=7	2.74E-14	3.29E-14	2.37E-14	3.20E-14	2.37E-14
N=8	3.02E-13	2.72E-13	4.00E-13	2.00E-13	3.54E-13
N=9	4.86E-12	4.38E-12	1.84E-12	3.74E-12	2.35E-12
N=10	3.49E-11	2.51E-11	8.99E-12	3.13E-11	7.06E-12
N=11	1.71E-10	1.27E-10	3.47E-11	1.25E-10	2.57E-11
N=12	7.02E-10	5.76E-10	1.71E-10	4.54E-10	7.90E-11
N=13	1.22E-09	1.32E-09	4.31E-10	1.39E-09	1.44E-10
N=14	1.94E-09	2.26E-09	1.53E-09	1.86E-09	4.09E-10
N=15	3.20E-08	3.26E-08	3.19E-08	2.61E-08	5.38E-10
N=16	2.08E-07	1.27E-07	3.70E-07	2.20E-07	2.31E-09
N=17	1.19E-06	9.81E-07	2.93E-06	6.16E-07	1.52E-09
N=18	4.94E-06	4.83E-06	2.62E-05	5.31E-06	6.63E-09
N=19	1.66E-05	1.22E-05	8.30E-05	6.80E-06	8.79E-09
N=20	1.37E-05	1.15E-05	0.001035	5.34E-06	1.98E-08
N=21	0.000532	0.000563	0.004142	0.000366	2.22E-08
N=22	0.004935	0.006319	0.017773	0.007157	5.27E-08
N=23	0.053437	0.036486	0.086101	0.024775	3.66E-05
N=24	2.122255	1.03868	0.449262	0.505817	0.002095
N=25	72.4421	19.17017	10.36376	3.788539	0.072037

## LAMPIRAN A (LANJUTAN)

Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = 5$ 

	$\rho=0.6$	$\rho=0.7$	$\rho=0.8$	$\rho=0.9$	$\rho=1$
N=1	0	0	0	0	0
N=2	7.11E-17	1.42E-16	0	0	7.11E-17
N=3	4.62E-16	9.59E-16	0	0	4.26E-16
N=4	1.95E-15	3.27E-15	1.14E-15	2.27E-15	2.17E-15
N=5	8.46E-15	1.01E-14	7.32E-15	1.10E-14	8.14E-15
N=6	2.43E-14	3.18E-14	1.93E-14	2.34E-14	2.65E-14
N=7	2.61E-14	1.19E-13	4.41E-14	3.09E-14	2.31E-14
N=8	3.91E-13	2.82E-13	2.17E-13	1.35E-13	2.59E-13
N=9	2.05E-12	3.78E-13	2.28E-12	2.26E-12	2.50E-12
N=10	6.28E-12	1.37E-12	2.99E-11	8.76E-12	7.03E-12
N=11	3.72E-11	1.62E-12	1.14E-10	5.99E-11	2.68E-11
N=12	1.16E-10	1.80E-11	5.58E-10	1.84E-10	8.23E-11
N=13	6.74E-10	4.49E-10	1.29E-09	1.31E-09	1.10E-10
N=14	1.03E-09	8.40E-09	1.78E-09	5.49E-09	5.81E-10
N=15	2.99E-08	3.15E-08	3.12E-08	7.57E-08	8.32E-10
N=16	1.64E-07	7.52E-07	1.41E-07	5.90E-07	1.21E-09
N=17	3.76E-06	4.06E-06	7.23E-07	4.67E-06	3.27E-09
N=18	2.16E-05	1.54E-05	5.06E-06	1.83E-05	8.33E-09
N=19	0.000104	1.62E-04	9.19E-06	0.00018	1.14E-08
N=20	0.000818	0.000469	8.36E-06	0.000846	1.42E-08
N=21	0.003103	0.002455	0.000391	0.003754	3.33E-08
N=22	0.020436	0.012351	0.005157	0.015647	6.71E-08
N=23	0.085302	0.078429	0.021496	0.142097	2.08E-05
N=24	0.338768	0.291404	0.44991	0.456042	0.001478
N=25	3.61564	3.480869	1.095924	3.192107	0.042814

**LAMPIRAN A (LANJUTAN)**  
**Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = 5$**

	$\rho=1.1$	$\rho=1.2$	$\rho=1.3$	$\rho=1.4$	$\rho=1.5$
N=1	0	0	0	0	0
N=2	7.11E-17	1.07E-16	0	1.78E-16	1.07E-16
N=3	4.26E-16	3.91E-16	0	7.46E-16	4.62E-16
N=4	1.10E-15	2.03E-15	1.95E-15	2.56E-15	7.82E-16
N=5	2.20E-15	9.27E-15	1.51E-14	1.03E-14	1.60E-15
N=6	4.52E-14	3.31E-14	6.61E-14	4.40E-14	3.06E-15
N=7	2.72E-13	3.46E-14	1.36E-13	1.17E-13	3.36E-14
N=8	1.04E-12	3.14E-13	4.39E-13	3.08E-13	4.59E-13
N=9	2.31E-12	1.46E-12	1.45E-12	6.61E-13	3.23E-12
N=10	8.00E-12	9.89E-12	1.89E-11	1.02E-12	1.42E-11
N=11	1.10E-10	3.03E-11	1.41E-10	2.02E-12	5.62E-11
N=12	8.52E-10	1.18E-10	4.80E-10	2.06E-11	3.05E-10
N=13	3.28E-09	9.44E-10	3.90E-09	3.25E-10	7.58E-10
N=14	1.25E-08	9.40E-10	1.53E-08	8.04E-09	5.91E-09
N=15	8.37E-08	1.99E-08	5.40E-08	6.95E-08	4.32E-08
N=16	5.16E-07	3.52E-07	1.47E-07	5.45E-07	3.41E-07
N=17	1.29E-06	3.55E-06	2.01E-06	2.65E-06	1.50E-06
N=18	1.28E-05	1.80E-05	1.72E-05	1.84E-05	5.00E-06
N=19	9.25E-05	6.67E-05	8.35E-05	1.68E-04	1.73E-05
N=20	2.90E-04	9.00E-04	0.000479	4.98E-04	1.38E-04
N=21	0.002241	0.002797	0.002423	0.003157	3.90E-04
N=22	0.006494	0.024248	0.011439	0.010252	1.49E-03
N=23	0.074822	0.072647	0.0649	0.049966	4.91E-03
N=24	0.378635	0.290408	0.290956	0.410824	0.009553
N=25	1.272424	2.508925	0.652183	3.572444	0.059503

## LAMPIRAN A (LANJUTAN)

Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = 5$ 

	$\rho=1.6$	$\rho=1.7$	$\rho=1.8$	$\rho=1.9$	$\rho=2$
N=1	0	0	0	0	0
N=2	0.00E+00	1.07E-16	0.00E+00	1.07E-16	1.07E-16
N=3	0.00E+00	4.26E-16	0.00E+00	6.75E-16	5.33E-16
N=4	7.82E-16	1.39E-15	1.35E-15	2.31E-15	1.53E-15
N=5	6.25E-15	8.17E-15	1.03E-14	1.32E-14	8.70E-15
N=6	2.50E-14	2.29E-14	1.97E-14	3.01E-14	1.97E-14
N=7	5.65E-14	3.11E-14	4.69E-14	1.82E-13	2.06E-14
N=8	2.17E-13	2.42E-13	1.40E-13	6.32E-13	2.30E-13
N=9	3.36E-12	2.43E-12	2.18E-12	3.60E-12	1.75E-12
N=10	2.40E-11	8.12E-12	1.22E-11	1.81E-11	9.19E-12
N=11	9.58E-11	3.25E-11	6.07E-11	4.37E-11	3.51E-11
N=12	5.69E-10	2.14E-10	1.42E-10	8.19E-11	9.53E-11
N=13	1.48E-09	2.45E-09	1.31E-09	2.01E-09	1.35E-10
N=14	1.60E-09	1.06E-08	7.65E-09	1.43E-08	4.78E-10
N=15	2.04E-08	6.51E-08	6.78E-08	5.01E-08	1.08E-09
N=16	2.02E-07	1.21E-07	4.38E-07	4.62E-08	2.70E-09
N=17	1.09E-06	3.08E-07	3.48E-06	1.11E-06	4.56E-09
N=18	5.08E-06	9.51E-06	1.86E-05	7.93E-06	9.66E-09
N=19	8.68E-06	8.29E-05	2.19E-04	5.80E-05	1.01E-08
N=20	7.80E-06	0.000273	1.01E-03	5.35E-04	1.34E-08
N=21	0.000303	0.002318	0.004026	2.35E-03	3.45E-08
N=22	0.004425	0.010387	0.020234	0.008584	8.05E-08
N=23	0.036483	0.061677	0.11841	0.029041	2.71E-05
N=24	0.414509	0.479406	0.293531	0.106245	0.00169
N=25	1.565112	4.076269	2.848542	0.089584	0.037989

## LAMPIRAN B

Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = e^{0.1t}$

	$\rho=0.1$	$\rho=0.2$	$\rho=0.3$	$\rho=0.4$	$\rho=0.5$
N=1	Inf	0.884283	0.413212	0.256188	0.177677
N=2	NaN	0.418318	0.126221	0.081562	0.068561
N=3	NaN	0.295598	0.145564	0.086473	0.052053
N=4	NaN	0.319823	0.089149	0.061211	0.049676
N=5	NaN	0.220874	0.102276	0.061442	0.0367
N=6	NaN	0.255212	0.07876	0.050795	0.03415
N=7	NaN	0.234909	0.087006	0.037808	0.025576
N=8	NaN	0.219703	0.06051	0.031354	0.029281
N=9	NaN	0.214985	0.054341	0.035453	0.02795
N=10	NaN	0.143408	0.065281	0.037633	0.012169
N=11	NaN	0.148494	0.070866	0.016833	0.022439
N=12	NaN	0.183573	0.05429	0.030035	0.021087
N=13	NaN	0.200588	0.032978	0.031118	0.015167
N=14	NaN	0.186987	0.054522	0.020522	0.01982
N=15	NaN	0.101836	0.056882	0.024568	0.010561
N=16	NaN	0.115349	0.033965	0.020098	0.021466
N=17	NaN	0.164167	0.044111	0.024865	0.008199
N=18	NaN	0.180486	0.041738	0.024493	0.016079
N=19	NaN	0.113417	0.028033	0.016595	0.014098
N=20	NaN	0.114973	0.054939	0.019772	0.011759
N=21	NaN	0.145602	0.023255	0.019585	0.010727
N=22	NaN	0.064438	0.031164	0.015157	0.010528
N=23	NaN	0.084098	0.013869	0.079657	0.009291
N=24	NaN	3.459636	0.158414	1.501382	0.175256
N=25	NaN	57.90071	6.699771	9.638977	2.315371

## LAMPIRAN B (LANJUTAN)

Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = e^{0.1t}$ 

	$\rho=0.6$	$\rho=0.7$	$\rho=0.8$	$\rho=0.9$	$\rho=1$
N=1	0.13057	0.099165	0.076733	0.059909	0.046824
N=2	0.061017	0.057303	0.052641	0.047693	0.042767
N=3	0.036281	0.030203	0.030024	0.028843	0.028771
N=4	0.042728	0.031863	0.024527	0.021089	0.01917
N=5	0.029414	0.026944	0.020677	0.017873	0.014969
N=6	0.021067	0.017867	0.015463	0.01878	0.017539
N=7	0.024477	0.020439	0.015923	0.015135	0.01163
N=8	0.023063	0.016645	0.010944	0.008453	0.011868
N=9	0.014543	0.011346	0.014994	0.014199	0.008874
N=10	0.018515	0.016872	0.009785	0.009421	0.009718
N=11	0.016051	0.01108	0.010368	0.010348	0.007292
N=12	0.012132	0.012755	0.008233	0.008957	0.009611
N=13	0.015778	0.008493	0.012245	0.005718	0.005168
N=14	0.010291	0.0132	0.004529	0.01046	0.006269
N=15	0.014921	0.007291	0.010187	0.006207	0.006971
N=16	0.008978	0.009044	0.009122	0.005066	0.00733
N=17	0.010859	0.010691	0.00426	0.00893	0.002931
N=18	0.013408	0.005674	0.008402	0.005469	0.006158
N=19	0.00475	0.009193	0.007099	0.0039	0.006327
N=20	0.011648	0.007795	0.005011	0.006381	0.004267
N=21	0.007206	0.005715	0.006329	0.00401	0.003377
N=22	0.011307	0.006764	0.006992	0.005557	0.017194
N=23	0.076947	0.006533	0.036712	0.081325	0.056384
N=24	0.387906	0.057512	0.831303	0.283276	0.425381
N=25	4.605571	0.639755	1.977625	2.035861	3.164187

## LAMPIRAN B (LANJUTAN)

Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = e^{0.1t}$ 

	$\rho=1.1$	$\rho=1.2$	$\rho=1.3$	$\rho=1.4$	$\rho=1.5$
N=1	0.038227	0.032952	0.028557	0.027187	0.026028
N=2	0.03801	0.03505	0.032091	0.029114	0.026182
N=3	0.029073	0.028321	0.026861	0.024938	0.024135
N=4	0.018265	0.018381	0.017578	0.016144	0.01711
N=5	0.012455	0.012186	0.012741	0.014337	0.015597
N=6	0.014848	0.012573	0.011145	0.01038	0.008829
N=7	0.010114	0.010671	0.009173	0.008702	0.010358
N=8	0.01257	0.012203	0.010723	0.007835	0.005466
N=9	0.006774	0.008263	0.008905	0.010094	0.00902
N=10	0.008935	0.007631	0.007111	0.007584	0.008433
N=11	0.008278	0.0077	0.006872	0.005881	0.005688
N=12	0.005997	0.005164	0.006556	0.007974	0.00676
N=13	0.009362	0.007147	0.004286	0.004123	0.007038
N=14	0.004736	0.007077	0.006216	0.004498	0.004754
N=15	0.004167	0.006182	0.006531	0.004304	0.00339
N=16	0.006372	0.002497	0.006003	0.006232	0.003725
N=17	0.006511	0.005104	0.003349	0.005952	0.005083
N=18	0.00425	0.006463	0.002814	0.003687	0.006151
N=19	0.003567	0.004094	0.005618	0.002749	0.003452
N=20	0.005191	0.004402	0.003614	0.003517	0.003912
N=21	0.00666	0.002666	0.006013	0.002999	0.002209
N=22	0.005349	0.002403	0.00647	0.005224	0.001579
N=23	0.033191	0.02674	0.029368	0.030646	0.004108
N=24	0.347707	0.18726	0.031974	0.173282	0.032478
N=25	1.851008	2.370119	0.591888	0.949005	0.410007

## LAMPIRAN B (LANJUTAN)

Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = e^{0.1t}$ 

	$\rho=1.6$	$\rho=1.7$	$\rho=1.8$	$\rho=1.9$	$\rho=2$
N=1	0.025024	0.024145	0.024504	0.025046	0.02553
N=2	0.023331	0.020583	0.018129	0.017479	0.016795
N=3	0.023109	0.021778	0.020235	0.018548	0.016771
N=4	0.017751	0.017763	0.017286	0.016439	0.015316
N=5	0.015905	0.015471	0.014994	0.015095	0.014739
N=6	0.008521	0.010701	0.012047	0.012666	0.012679
N=7	0.01074	0.010111	0.00979	0.00985	0.009838
N=8	0.006032	0.008064	0.009022	0.009055	0.009831
N=9	0.006444	0.005037	0.006648	0.007572	0.00769
N=10	0.007692	0.006252	0.005018	0.004913	0.00655
N=11	0.007278	0.007784	0.006645	0.005358	0.004632
N=12	0.004617	0.004881	0.006241	0.006133	0.006004
N=13	0.00701	0.005145	0.004842	0.004761	0.004612
N=14	0.006037	0.0059	0.004456	0.004825	0.004658
N=15	0.005328	0.006009	0.005669	0.003635	0.004076
N=16	0.002735	0.00508	0.005757	0.005158	0.003542
N=17	0.002537	0.003621	0.005617	0.005246	0.004076
N=18	0.004393	0.001341	0.003881	0.005874	0.005445
N=19	0.005445	0.003404	0.002072	0.003812	0.005543
N=20	0.003966	0.003776	0.002714	0.002991	0.00444
N=21	0.004564	0.004032	0.004985	0.002336	0.00366
N=22	0.003849	0.011135	0.009474	0.002702	0.008914
N=23	0.015112	0.039416	0.034953	0.002619	0.035876
N=24	0.141962	0.089995	0.063168	0.034633	0.238267
N=25	0.479713	0.21521	0.327683	0.244887	1.319623



LAMPIRAN C

Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = t$

	$\rho=0.1$	$\rho=0.2$	$\rho=0.3$	$\rho=0.4$	$\rho=0.5$
N=1	21.83333	10.41667	6.611111	4.708333	3.566667
N=2	11.50814	4.156929	2.149088	1.435705	1.097449
N=3	5.784065	2.049518	1.306004	0.865957	0.625384
N=4	3.541895	1.428166	0.814274	0.785249	0.720118
N=5	2.72243	1.083305	0.960742	0.757704	0.578022
N=6	1.787086	1.235921	0.786168	0.610093	0.389438
N=7	1.729022	1.119854	0.719965	0.328507	0.289439
N=8	1.979735	0.996845	0.388392	0.313831	0.391443
N=9	2.045772	0.7701	0.369009	0.421974	0.341964
N=10	1.659106	0.390616	0.51361	0.382002	0.097903
N=11	1.650335	0.472236	0.530265	0.121007	0.265631
N=12	1.486458	0.653192	0.337737	0.275063	0.25792
N=13	1.024052	0.704378	0.154326	0.320123	0.166847
N=14	0.633581	0.583166	0.359626	0.198779	0.17814
N=15	0.728233	0.266919	0.380895	0.174735	0.144746
N=16	0.907502	0.256501	0.2359	0.174177	0.221138
N=17	1.032916	0.4643	0.228479	0.229195	0.078383
N=18	1.138436	0.512164	0.211692	0.213009	0.15152
N=19	1.058903	0.33657	0.2009	0.100924	0.165322
N=20	0.833127	0.31442	0.30741	0.156941	0.110341
N=21	0.381972	0.258018	0.157454	0.185032	0.081156
N=22	0.305442	0.157313	0.082013	0.084257	0.046203
N=23	0.295619	0.148077	0.080001	0.0828	0.630004
N=24	21.53941	5.510527	0.640384	1.087566	5.446537
N=25	403.4192	58.83925	9.743986	5.657168	56.12599

## LAMPIRAN C (LANJUTAN)

Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = t$ 

	$\rho=0.6$	$\rho=0.7$	$\rho=0.8$	$\rho=0.9$	$\rho=1$
N=1	2.805556	2.261905	1.854167	1.537037	1.283333
N=2	0.928338	0.839872	0.752378	0.668299	0.588735
N=3	0.584178	0.550223	0.554649	0.531407	0.525461
N=4	0.656878	0.530802	0.46135	0.413605	0.364096
N=5	0.471565	0.384666	0.268238	0.223876	0.227423
N=6	0.229288	0.25164	0.253019	0.309416	0.301336
N=7	0.339251	0.331228	0.286952	0.239449	0.158339
N=8	0.342947	0.227649	0.10703	0.130277	0.198921
N=9	0.141985	0.153734	0.232368	0.228491	0.151871
N=10	0.237802	0.252215	0.15222	0.124391	0.125673
N=11	0.233595	0.144718	0.121675	0.152913	0.118164
N=12	0.14688	0.15518	0.12713	0.149702	0.134376
N=13	0.171477	0.137518	0.168353	0.061662	0.084204
N=14	0.155569	0.161715	0.058431	0.147431	0.109613
N=15	0.171442	0.08046	0.148105	0.100418	0.069065
N=16	0.08219	0.139111	0.112496	0.067128	0.113249
N=17	0.14796	0.122109	0.065901	0.124823	0.05815
N=18	0.150687	0.069625	0.11837	0.072447	0.08254
N=19	0.047145	0.123946	0.084786	0.065551	0.092513
N=20	0.136357	0.091116	0.069384	0.097176	0.051789
N=21	0.101213	0.060399	0.093219	0.050019	0.067869
N=22	0.052693	0.042849	0.045785	0.059039	0.02874
N=23	0.051971	0.446827	0.045735	0.397082	0.138608
N=24	0.267354	0.908624	0.456175	1.183975	1.813681
N=25	1.530268	10.99052	0.402505	10.64259	11.62201

## LAMPIRAN C (LANJUTAN)

Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = t$ 

	$\rho=1.1$	$\rho=1.2$	$\rho=1.3$	$\rho=1.4$	$\rho=1.5$
N=1	1.112121	0.969444	0.864103	0.788095	0.722222
N=2	0.519999	0.521757	0.513584	0.498561	0.478832
N=3	0.519529	0.499065	0.468763	0.432048	0.425584
N=4	0.324992	0.293804	0.254303	0.211993	0.230246
N=5	0.218653	0.220374	0.240366	0.265445	0.278901
N=6	0.268371	0.233833	0.197857	0.160618	0.114774
N=7	0.106448	0.148434	0.157694	0.175752	0.197807
N=8	0.217001	0.206229	0.170975	0.118883	0.083805
N=9	0.10463	0.104607	0.129509	0.158126	0.151065
N=10	0.145111	0.131171	0.119355	0.125538	0.126803
N=11	0.138657	0.123983	0.087672	0.080423	0.089531
N=12	0.068918	0.080884	0.120009	0.132872	0.101779
N=13	0.145665	0.114306	0.064078	0.056445	0.106824
N=14	0.070535	0.086087	0.099159	0.086653	0.078838
N=15	0.077756	0.103782	0.089337	0.054868	0.060179
N=16	0.090099	0.041356	0.085196	0.092049	0.066424
N=17	0.078556	0.080119	0.0651	0.079385	0.065714
N=18	0.072751	0.089456	0.039709	0.059702	0.093011
N=19	0.054874	0.05331	0.088336	0.050804	0.037596
N=20	0.073722	0.074378	0.03628	0.060377	0.067072
N=21	0.075215	0.034846	0.076418	0.046862	0.030828
N=22	0.057711	0.048018	0.04162	0.043322	0.031359
N=23	0.071882	0.047515	0.074781	0.182841	0.159475
N=24	0.69358	0.125589	0.887473	0.881388	0.62935
N=25	3.668895	0.335336	2.458306	6.043442	4.673871

## LAMPIRAN C (LANJUTAN)

Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = t$ 

	$\rho=1.6$	$\rho=1.7$	$\rho=1.8$	$\rho=1.9$	$\rho=2$
N=1	0.664583	0.621569	0.598148	0.577193	0.558333
N=2	0.455915	0.430898	0.412339	0.403302	0.392584
N=3	0.413037	0.394972	0.372811	0.347679	0.320469
N=4	0.252525	0.264117	0.266967	0.262779	0.253015
N=5	0.27696	0.263014	0.249108	0.242405	0.228963
N=6	0.106637	0.150122	0.180291	0.198131	0.205088
N=7	0.197253	0.179029	0.160957	0.14393	0.130821
N=8	0.084005	0.124605	0.147223	0.153293	0.163101
N=9	0.118145	0.09736	0.113521	0.118005	0.110236
N=10	0.104263	0.093762	0.085386	0.0825	0.109908
N=11	0.1223	0.132116	0.114104	0.085945	0.057277
N=12	0.057209	0.062459	0.098277	0.109324	0.108818
N=13	0.112567	0.087178	0.074859	0.065146	0.067071
N=14	0.079073	0.077217	0.071295	0.082067	0.077954
N=15	0.08833	0.089398	0.08209	0.049103	0.059975
N=16	0.049994	0.067842	0.080441	0.078818	0.061481
N=17	0.049437	0.067807	0.082255	0.06206	0.054053
N=18	0.063761	0.01932	0.062345	0.089895	0.078659
N=19	0.079924	0.064874	0.034976	0.045668	0.07885
N=20	0.050885	0.052569	0.049014	0.050393	0.060218
N=21	0.062129	0.054747	0.048046	0.036905	0.047387
N=22	0.04888	0.054771	0.046047	0.045338	0.039221
N=23	0.048374	0.25728	0.156857	0.046378	0.103091
N=24	0.214153	1.45442	0.428825	0.410063	0.979617
N=25	0.289493	10.22222	4.632722	1.114562	5.25215

## LAMPIRAN D

Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = \sin t$

	$\rho=0.1$	$\rho=0.2$	$\rho=0.3$	$\rho=0.4$	$\rho=0.5$
N=1	0.76327	0.540198	0.49608	0.469802	0.459839
N=2	0.580497	0.836819	0.830094	0.722328	0.585573
N=3	0.961034	0.48717	0.166164	0.288822	0.357122
N=4	0.551515	0.45967	0.23383	0.116572	0.313746
N=5	0.445522	0.147097	0.434765	0.185128	0.109706
N=6	0.362684	0.295179	0.315694	0.247993	0.039345
N=7	0.39713	0.40772	0.174557	0.174136	0.063603
N=8	0.074024	0.309582	0.032353	0.168	0.14247
N=9	0.477731	0.103025	0.048104	0.205001	0.161885
N=10	0.345597	0.039371	0.137458	0.160009	0.056665
N=11	0.03849	0.096585	0.196923	0.041178	0.150729
N=12	0.277492	0.203887	0.150174	0.072237	0.151089
N=13	0.264319	0.25595	0.072843	0.048539	0.098588
N=14	0.127939	0.209925	0.161685	0.012671	0.104672
N=15	0.050112	0.079477	0.156984	0.008973	0.079698
N=16	0.089721	0.06855	0.085543	0.024042	0.114796
N=17	0.228524	0.067251	0.069746	0.042045	0.038311
N=18	0.293377	0.016134	0.048435	0.059922	0.067776
N=19	0.227231	0.0303	0.035257	0.034509	0.066231
N=20	0.095558	0.050468	0.02552	0.059729	0.03708
N=21	0.018077	0.071262	0.004989	0.079776	0.02728
N=22	0.045969	0.083244	0.007001	0.067594	0.029099
N=23	0.179686	0.189638	0.061116	0.038958	0.021689
N=24	3.966116	1.059407	0.541304	0.039845	0.347842
N=25	58.92726	2.496058	17.57677	2.647853	4.650235

## LAMPIRAN D (LANJUTAN)

Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = \sin t$ 

	$\rho=0.6$	$\rho=0.7$	$\rho=0.8$	$\rho=0.9$	$\rho=1$
N=1	0.486587	0.50518	0.516877	0.523004	0.524799
N=2	0.452724	0.341356	0.255892	0.194814	0.154369
N=3	0.372956	0.344126	0.306654	0.258789	0.203637
N=4	0.399637	0.368471	0.322563	0.267359	0.215352
N=5	0.233923	0.256466	0.204855	0.169908	0.161163
N=6	0.080805	0.15162	0.189076	0.239409	0.22889
N=7	0.069313	0.157369	0.196134	0.185831	0.12918
N=8	0.016032	0.086251	0.068443	0.098124	0.159595
N=9	0.025846	0.053611	0.131436	0.166187	0.121255
N=10	0.046205	0.043687	0.072505	0.087936	0.102859
N=11	0.072426	0.014173	0.05435	0.100978	0.093098
N=12	0.056818	0.005375	0.044464	0.090932	0.103456
N=13	0.077897	0.01122	0.048945	0.032279	0.062793
N=14	0.075852	0.027564	0.015084	0.078296	0.075816
N=15	0.096216	0.015282	0.022562	0.048563	0.050096
N=16	0.048066	0.040313	0.011351	0.028023	0.075709
N=17	0.089317	0.042467	0.006339	0.047728	0.036556
N=18	0.094992	0.024864	0.002265	0.025541	0.049222
N=19	0.030232	0.054016	0.004977	0.019334	0.053611
N=20	0.088329	0.044744	0.006506	0.024678	0.028966
N=21	0.067255	0.034163	0.011247	0.010597	0.036832
N=22	0.0437	0.058943	0.013951	0.01294	0.029961
N=23	0.03334	0.137579	0.04529	0.026079	0.033234
N=24	0.226746	0.106405	0.959823	0.086682	0.092143
N=25	3.287598	1.461164	1.194146	1.019053	0.258527

## LAMPIRAN D (LANJUTAN)

Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = \sin t$ 

	$\rho=1.1$	$\rho=1.2$	$\rho=1.3$	$\rho=1.4$	$\rho=1.5$
N=1	0.523329	0.519474	0.513932	0.507242	0.499814
N=2	0.130349	0.127171	0.138399	0.152719	0.168323
N=3	0.151171	0.106573	0.071813	0.051532	0.060461
N=4	0.160603	0.121069	0.089798	0.06476	0.047163
N=5	0.130503	0.111788	0.097895	0.080017	0.060139
N=6	0.187512	0.149089	0.104274	0.075733	0.050489
N=7	0.083318	0.104814	0.098955	0.089422	0.07769
N=8	0.171733	0.153375	0.119303	0.074774	0.048987
N=9	0.086333	0.084661	0.091534	0.101557	0.086709
N=10	0.119983	0.106287	0.089649	0.08709	0.077368
N=11	0.115526	0.10306	0.071493	0.061017	0.057907
N=12	0.059794	0.068267	0.095978	0.099516	0.072152
N=13	0.121248	0.098269	0.054192	0.042189	0.075271
N=14	0.05837	0.076036	0.084801	0.068501	0.057074
N=15	0.061897	0.088828	0.078353	0.047617	0.044962
N=16	0.071854	0.035016	0.074456	0.078583	0.053049
N=17	0.063442	0.06839	0.055779	0.068864	0.054781
N=18	0.05589	0.077006	0.035141	0.051295	0.076677
N=19	0.039261	0.046403	0.077748	0.043477	0.032215
N=20	0.053729	0.062451	0.033958	0.053392	0.056402
N=21	0.049928	0.028639	0.068119	0.047833	0.027579
N=22	0.039257	0.074638	0.041055	0.055396	0.047386
N=23	0.023643	0.129165	0.036268	0.069107	0.12573
N=24	0.029141	0.350455	0.08484	0.053795	0.391173
N=25	0.386385	1.878402	0.198923	0.208558	3.058615



## LAMPIRAN D (LANJUTAN)

Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = \sin t$ 

	$\rho=1.6$	$\rho=1.7$	$\rho=1.8$	$\rho=1.9$	$\rho=2$
N=1	0.491954	0.483886	0.475772	0.46773	0.459839
N=2	0.184013	0.199027	0.212903	0.22539	0.236378
N=3	0.070116	0.083933	0.096013	0.105344	0.111925
N=4	0.036913	0.035025	0.042202	0.05245	0.064303
N=5	0.042123	0.02483	0.018346	0.025736	0.031654
N=6	0.031991	0.022983	0.017476	0.019324	0.024965
N=7	0.064297	0.047368	0.031862	0.020601	0.014672
N=8	0.02995	0.034051	0.031657	0.024086	0.015262
N=9	0.060683	0.036551	0.028405	0.023172	0.016294
N=10	0.058149	0.044063	0.031181	0.020608	0.01606
N=11	0.06665	0.062994	0.047383	0.0288	0.015099
N=12	0.038153	0.031055	0.04174	0.038799	0.028583
N=13	0.072508	0.049468	0.035613	0.026156	0.021454
N=14	0.053392	0.04682	0.038407	0.033697	0.02742
N=15	0.05928	0.054658	0.045573	0.025994	0.02175
N=16	0.034661	0.042516	0.045864	0.039074	0.026836
N=17	0.035977	0.04193	0.047511	0.033612	0.024888
N=18	0.050203	0.013475	0.035458	0.046646	0.036779
N=19	0.062628	0.046543	0.021092	0.023938	0.036885
N=20	0.041372	0.039177	0.03148	0.028142	0.028941
N=21	0.051595	0.043726	0.036948	0.019361	0.024018
N=22	0.046162	0.039113	0.042424	0.051122	0.024046
N=23	0.02967	0.087249	0.123507	0.124441	0.030042
N=24	0.024797	0.347912	0.261719	1.081277	0.380708
N=25	0.250002	2.787904	3.015559	2.390716	2.480107



## LAMPIRAN E

Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = \cos t$

	$\rho=0.1$	$\rho=0.2$	$\rho=0.3$	$\rho=0.4$	$\rho=0.5$
N=1	0.986923	0.949201	0.890946	0.817826	0.735848
N=2	0.791029	0.456815	0.25951	0.224468	0.283773
N=3	0.373964	0.38269	0.419077	0.276941	0.137777
N=4	0.393706	0.183488	0.161663	0.224946	0.179361
N=5	0.3167	0.205566	0.046431	0.175148	0.142633
N=6	0.176429	0.197819	0.095487	0.113987	0.153025
N=7	0.104943	0.038809	0.146205	0.031817	0.101924
N=8	0.262601	0.090841	0.11373	0.012023	0.086614
N=9	0.086358	0.152954	0.099619	0.040539	0.066315
N=10	0.120567	0.099455	0.086132	0.064645	0.022768
N=11	0.18486	0.091907	0.069037	0.038916	0.02495
N=12	0.139567	0.055974	0.024329	0.073418	0.007853
N=13	0.019848	0.022038	0.008934	0.07152	0.006482
N=14	0.072776	0.027498	0.016692	0.056824	0.015838
N=15	0.117819	0.036569	0.034054	0.061932	0.013062
N=16	0.118004	0.053678	0.032992	0.050335	0.036604
N=17	0.051946	0.078593	0.045612	0.056888	0.013756
N=18	0.011055	0.089644	0.055719	0.049009	0.038606
N=19	0.072248	0.058986	0.03344	0.034847	0.03309
N=20	0.099591	0.048083	0.075334	0.032554	0.032695
N=21	0.066521	0.06553	0.026092	0.032297	0.032183
N=22	0.068575	0.055141	0.050086	0.017414	0.017296
N=23	0.073694	0.092457	0.028193	0.015339	0.059271
N=24	0.117495	1.470189	0.05742	0.087503	0.467321
N=25	7.677671	19.34307	0.779111	0.313555	3.202132

## LAMPIRAN E (LANJUTAN)

Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = \cos t$ 

	$\rho=0.6$	$\rho=0.7$	$\rho=0.8$	$\rho=0.9$	$\rho=1$
N=1	0.650386	0.565655	0.484581	0.408941	0.339619
N=2	0.341589	0.38166	0.400692	0.401137	0.387274
N=3	0.090831	0.123742	0.167209	0.210205	0.248298
N=4	0.10073	0.042262	0.061038	0.091364	0.11881
N=5	0.105893	0.055927	0.020834	0.03426	0.057307
N=6	0.10024	0.055731	0.025575	0.019416	0.045621
N=7	0.125818	0.090936	0.039692	0.0121	0.024218
N=8	0.109648	0.083834	0.049141	0.019852	0.014715
N=9	0.074606	0.05863	0.064671	0.036232	0.010378
N=10	0.086235	0.089077	0.046937	0.032878	0.012807
N=11	0.062514	0.066841	0.054381	0.03727	0.01705
N=12	0.047775	0.069067	0.050385	0.0366	0.022361
N=13	0.053614	0.04553	0.069046	0.033875	0.014951
N=14	0.026676	0.070979	0.026114	0.053869	0.025016
N=15	0.034031	0.03945	0.061129	0.029882	0.031008
N=16	0.020654	0.03971	0.057512	0.029946	0.029684
N=17	0.012663	0.05173	0.022975	0.053823	0.011597
N=18	0.015024	0.025578	0.049414	0.034618	0.031733
N=19	0.00514	0.034533	0.045261	0.020489	0.034368
N=20	0.002654	0.031595	0.028124	0.041058	0.025369
N=21	0.001901	0.018637	0.034604	0.036027	0.019323
N=22	0.005383	0.025765	0.03118	0.028447	0.015215
N=23	0.005653	0.107773	0.032497	0.02826	0.015882
N=24	0.004828	0.386712	0.277279	0.144593	0.050668
N=25	0.229998	3.461361	0.645638	1.058943	1.073733

## LAMPIRAN E (LANJUTAN)

Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = \cos t$ 

	$\rho=1.1$	$\rho=1.2$	$\rho=1.3$	$\rho=1.4$	$\rho=1.5$
N=1	0.282205	0.257448	0.235339	0.215657	0.19816
N=2	0.36476	0.344517	0.318944	0.290207	0.259922
N=3	0.272669	0.283385	0.282352	0.272378	0.2676
N=4	0.150468	0.1722	0.182685	0.187753	0.203677
N=5	0.078276	0.096932	0.11627	0.148123	0.169894
N=6	0.063139	0.068085	0.08617	0.094629	0.093247
N=7	0.043513	0.056896	0.057426	0.070375	0.093908
N=8	0.035873	0.057536	0.064487	0.05594	0.03939
N=9	0.018282	0.034405	0.054092	0.070039	0.068732
N=10	0.011435	0.024462	0.03857	0.050779	0.066093
N=11	0.006418	0.017922	0.03103	0.037373	0.044632
N=12	0.006052	0.009529	0.023904	0.04301	0.047418
N=13	0.007653	0.005567	0.012466	0.023377	0.046592
N=14	0.006504	0.005136	0.013346	0.017432	0.029885
N=15	0.01111	0.003455	0.014204	0.014812	0.016312
N=16	0.018409	0.004037	0.011904	0.02138	0.016069
N=17	0.018844	0.006798	0.006437	0.019998	0.023938
N=18	0.012109	0.008702	0.002773	0.012427	0.027944
N=19	0.012779	0.006701	0.001678	0.007719	0.017826
N=20	0.020221	0.006843	0.001253	0.004787	0.016293
N=21	0.021975	0.010287	0.003516	0.004264	0.008188
N=22	0.019227	0.045446	0.02082	0.019286	0.018702
N=23	0.045177	0.106373	0.131629	0.111332	0.075179
N=24	0.210861	0.334307	0.538964	0.780504	0.175726
N=25	0.643853	2.628967	0.802374	5.003628	0.774994

## LAMPIRAN E (LANJUTAN)

Tabel Nilai Rata-rata Error Relatif  $f(t) = \cos t$ 

	$\rho=1.6$	$\rho=1.7$	$\rho=1.8$	$\rho=1.9$	$\rho=2$
N=1	0.195465	0.195315	0.195181	0.195062	0.194955
N=2	0.229239	0.198954	0.169591	0.159722	0.155785
N=3	0.256604	0.24105	0.222334	0.201577	0.179653
N=4	0.212529	0.213484	0.208005	0.197533	0.183362
N=5	0.181231	0.183124	0.183483	0.185834	0.182209
N=6	0.107278	0.133217	0.150433	0.159197	0.160462
N=7	0.107103	0.109634	0.11832	0.126288	0.131349
N=8	0.062822	0.086944	0.101489	0.106227	0.122129
N=9	0.050664	0.051585	0.074462	0.089185	0.095047
N=10	0.065377	0.054045	0.052257	0.059937	0.080123
N=11	0.062594	0.068794	0.059077	0.056457	0.057579
N=12	0.041198	0.049278	0.059773	0.056529	0.063345
N=13	0.054638	0.046828	0.049149	0.049203	0.045057
N=14	0.0474	0.052887	0.043813	0.04965	0.047681
N=15	0.038313	0.052062	0.054268	0.038458	0.044292
N=16	0.019082	0.042671	0.054429	0.052674	0.038987
N=17	0.014217	0.02839	0.050715	0.054166	0.045574
N=18	0.024172	0.008252	0.035117	0.056777	0.057437
N=19	0.030663	0.021146	0.018007	0.039489	0.057959
N=20	0.024335	0.027115	0.015827	0.028669	0.047481
N=21	0.023718	0.027415	0.02609	0.020769	0.035679
N=22	0.018327	0.02497	0.03716	0.01406	0.031388
N=23	0.011097	0.03187	0.099391	0.051104	0.015892
N=24	0.200527	0.060075	0.208217	0.387301	0.192756
N=25	1.203212	0.364604	1.908212	1.307825	1.640585

## LAMPIRAN F

### Listing Program Metode *Papoulis*

```

clc;
clear all;

D0=input('Masukkan nilai dividen : ');
r=input('Masukkan tingkat suku bunga : ');
sigma=input('Masukkan nilai volatilitas : ');
t=input('Masukkan waktu : ');
n=input('Masukkan banyaknya baris : ');
rho=input('Masukkan rho : ');

gamma=2*r/sigma^2;
D=2*D0/sigma^2;
z=(1+D-gamma)/2;

A=zeros(n,n);
B=zeros(n,1);
for i=1:n
    p=(2*i-1)*rho;
    q1=z+sqrt(z^2+(p+gamma));
    q2=z-sqrt(z^2+(p+gamma));
    Sf(i)=fzero(@(x) x^q1*((gamma+p+(D-gamma)*q2)/(q2*(p+gamma)*(p+D)))+...
        (x*D*((1-q2)/(p^q1*q2*(p+D))))+...
        (gamma/(p^(1+q1)*(p+gamma))),[0 1000]);
end

```

## LAMPIRAN F(LANJUTAN)

```

tic
for i=1:n
    a=2*i-1;
    b=2*(i-1);
    A(i,1)=1/a;
    a=a+2;
    for j=2:i
        A(i,j)=A(i,j-1)*(1/a)*b;
        a=a+2;
        b=b-2;
    end
    B(i)=rho*Sf(i);
end

alpha=A\B;

jumlah2=0;
for k=0:n-1
    jumlah=0;
    for m=0:k
        jumlah=jumlah+((-1)^m*factorial(4*k-2*m)/((4^k)*factorial(m)*...
            factorial(2*k-m)*factorial(2*k-2*m))*exp(-rho*t)^(2*k-2*m));
    end
    jumlah2=jumlah2+(alpha(k+1)*jumlah);
end
toc

```

## LAMPIRAN G

### Listing Program Metode *Gaver-Stehfest*

```

clc;
clear all;
D0=input('Masukkan nilai dividen : ');
r=input('Masukkan tingkat suku bunga : ');
sigma=input('Masukkan nilai volatilitas : ');
t=input('Masukkan waktu : ');
L=input('Masukkan banyaknya baris : ');

gamma=2*r/sigma^2;
D=2*D0/sigma^2;
z=(1+D-gamma)/2;

nn2 = L/2;
nn21= nn2+1;

ln2_on_t = log(2.0) / t;
for n = 1:L
    p = n * ln2_on_t;
    q1=z+sqrt(z^2+(p+gamma));
    q2=z-sqrt(z^2+(p+gamma));
    Sf(n)=fzero(@(x) x^q1*((gamma+p+(D-gamma)*q2)/(q2*(p+gamma)*(p+D)))+...
        (x*D*((1-q2)/(p^q1*q2*(p+D))))+...
        (gamma/(p^(1+q1)*(p+gamma))), [0 10000]);
end

```

## LAMPIRAN G(LANJUTAN)

```

tic
for n = 1:L
    z = 0.0;
    for k = floor( ( n + 1 ) / 2 ):min(n,nn2)
        z = z + ((k^nn2)*factorial(2*k))/ ...
            (factorial(nn2-k)*factorial(k)*factorial(k-1)* ...
            factorial(n-k)*factorial(2*k - n));
    end
    v(n)=(-1)^(n+nn2)*z;
end

sum = 0.0;
for n = 1:L
    sum = sum + v(n) * Sf(n) ;
end

ilt = sum * ln2_on_t;
toc

```



## BIODATA PENULIS



Penulis memiliki nama lengkap Ivan Octaviano, lahir di Surabaya, pada 6 Oktober 1995. Terlahir sebagai anak ketiga dari 3 bersaudara dari pasangan Permana Indra Djatmiko dan Sri Djuwitastusi, SH. Sejak usia 4 tahun, penulis telah menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Dharma Wanita Surabaya (1999-2001), SD Negeri Kertajaya X/216 Surabaya (2001-2007), SMP Negeri 12 Surabaya (2007-2010), dan SMA Negeri 4 Surabaya (2010-2013). Kemudian pada tahun 2013, penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya melalui jalur SNMPTN dengan NRP 1213 100 025. Di Departemen Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan yang terdiri dari bidang minat Pemodelan dan Riset Operasi dan Pengolahan Data. Selama menempuh pendidikan di ITS, penulis aktif berorganisasi di Himpunan Mahasiswa Matematika ITS sebagai Head of Student Welfare Department (2015-2016) dan Lembaga Dakwah Jurusan Matematika sebagai Kepala Departemen Kaderisasi (2015-2016). Penulis juga aktif diberbagai kepanitiaan seperti Olimpiade Matematika ITS (OMITS) 2015.

Adapun informasi lebih lanjut mengenai Tugas

Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email  
ivanoctaviano25@gmail.com